$$T, S : H_1 \longrightarrow H_2$$
$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$\langle (T+\lambda S)^* y, x \rangle_{H_1} \overset{\text{op}}{=} \langle y, (T+\lambda S) x \rangle_{H_2}$$

$$\forall x \in H_1, \ y \in H_2$$

$$\| $$

$$\langle y, Tx + \lambda Sx \rangle$$

$$\|$$

$$\langle T^* y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle S^* y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle + \bar{\lambda} \langle y, Sx \rangle$$

$$\|$$

$$\langle T^* y + \bar{\lambda} S^* y, x \rangle = \langle (T^* + \bar{\lambda} S^*) y, x \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$$

- $T^{**} = T$ (ok)

$$ST : H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$$

$$(ST)^* : H_3 \longrightarrow H_1$$

$$(ST)^* = T^* \cdot S^*$$

<u>anw</u>

$$\langle (ST)^* x, y \rangle = \langle x, STy \rangle \quad \forall x, y$$

$$\|$$

$$\langle x, S(Ty) \rangle$$

$$\|$$

$$\langle T^*(S^* x), y \rangle = \langle S^* x, Ty \rangle$$

$$\|$$

$$\langle T^* S^* x, y \rangle \Longrightarrow (ST)^* = T^* S^*$$

<u>Παρατήρηση</u> $\quad T^*T : H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$

$$\|T^*T\| = \|T\|^2$$

<u>Απόδ.</u> $\forall x \in H_1$, $\quad \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle$

$$= |\langle T^*Tx, x\rangle|$$

$$\le \|T^*Tx\| \, \|x\|$$

$$\le \|T^*T\| \, \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|T\|^2 \le \|T^*T\| \quad \Big\} \text{ ισότητα}$$

όμως, $\quad \|T^*T\| \le \underbrace{\|T^*\|}_{=\|T\|} \, \|T\| = \|T\|^2$

$$\|T^*\| = \sup\{ |\langle T^*y, x\rangle| \ : \ y \in H_2,\ x \in H_1,\ \|y\| \le 1,\ \|x\| \le 1 \}$$

$$= \sup\{ |\langle y, Tx\rangle| \quad '' \quad '' \}$$

$$= \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| \quad '' \quad '' \}$$

$$= \|T\|$$

$\rightarrow (\mathcal{B}(H), +, \circ, *, \|\ \|)$: $\|T^*T\| = \|T\|^2$

$\rightarrow (C(K), +, \circ, *, \|\ \|_\infty)$ $\|f^*f\| = \|f\|^2$

$$f^*(t) = \overline{f(t)}$$

$$(f^*f)(t) = |f(t)|^2$$

C^*- άλγεβρες

(Gelfand - Naimark, 1943)

Παράδ. 1 $\quad S \in B(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \qquad Se_n = e_{n+1}$

$$S^*Se_n = S^*e_{n+1} = e_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

Ενώ

$$SS^*e_0 = S(0) = 0$$

άρα $S^*S \neq SS^*$

(διότι $S^*(e_n) = \begin{cases} e_{n-1}, & n>0 \\ 0, & n=0 \end{cases}$)

Παράδ. 2 $\quad M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$

$$M_f(g) = fg \quad (g \in C([a,b]))$$

Έχω υπολογίσει

$$M_f^* = M_{\bar{f}}$$

$f_1, f_2 \in C([a,b])$

Τότε, $M_{f_1}M_{f_2}(g) = M_{f_1}(f_2 g) = f_1 f_2 g$

$$= f_2(f_1 g) = M_{f_2}(M_{f_1}(g)) \quad \forall g \in C([a,b])$$

$$\Rightarrow M_{f_1}M_{f_2} = M_{f_2}M_{f_1}$$

άρα $\underline{M_f^*}M_f = M_{\bar{f}}M_f = M_{\bar{f}f}$

$$= \underline{M_f M_f^*}$$

M_f πάντα κανονικός

αυτοσυζυγής $\iff M_f^* = M_f$

ή

$M_{\bar{f}} = M_f$

$\Updownarrow$

$\bar{f} = f$

Fourier

$f \in C([0,2\pi])$ $\quad f(0) = f(2\pi)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$$

$$= \langle f, e_n \rangle$$

όπου $f_n(t) = \exp(int)$, $n \in \mathbb{Z}$

$\{ \cancel{e_n}\, f_n : n \in \mathbb{Z} \}$ είναι ο.κ. στον $L^2([0,2\pi])$

από Parseval:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2$$

$$= \|f\|_{L^2}^2$$

$$F : f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$(C([0,2\pi]), \| \ \|_{L^2}) \longrightarrow (\ell^2(\mathbb{Z}), \| \ \|_{\ell^2})$$

γραμμική, ισομετρία

Επιπλέον, αποδεικνύεται (Fejér) ότι η $\{ \cancel{e_n}\, f_n : n \in \mathbb{Z} \}$ είναι ο.κ. βάση για $L^2([0,2\pi])$

οπότε η απεικόνιση F επεκτείνεται σε

$$F : L^2([0,2\pi]) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

ισομετρία, επί

Τώρα υπολογίζουμε:

$F^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([0,2\pi])$

$\langle F^*(\vec{x}), f \rangle_{L^2} = \langle \vec{x}, Ff \rangle_{\ell^2}$ $\qquad (Ff)(n) = \hat{f}(n) \ \forall n \in \mathbb{Z}$

να δείξω ότι $\quad L^2 \xrightarrow{F} \ell^2 \xrightarrow{F^*} L^2$ ισχ. $F^*F = I_{L^2}$

<u>αρκεί</u> $(F^*F)(f) = f \quad \forall f \in C[0,2\pi]$

<u>και</u>

$\ell^2 \xrightarrow{F^*} L^2 \xrightarrow{F} \ell^2$ ισχ. $FF^* = I_{\ell^2}$

ξέρω ότι $c_{00}(\mathbb{Z})$

αρκεί νδο $\forall n \in \mathbb{Z}$

$(FF^*)(e_n) = e_n$

$e_n = (\ldots \quad 0, 0, \underset{\uparrow}{\overset{n}{1}}, 0, \ldots)$

$\big\downarrow F^*$?

f_n στο $L^2 \qquad f_n(t) = e^{int}$

$\big\downarrow F$

e_n

H χώρος Hilbert, $T \in B(H)$

<u>Πρόταση</u> T normal $\iff \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall x \in H$

(<u>άρα</u> τότε $\|T\| = \|T^*\|$)

<u>Απόδ.</u> $\forall x \in H$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$$

$$\|T^*x\|^2 = \langle \;-\;-\;-\; = \langle TT^*x, x\rangle$$

$\implies$

αν $TT^* = T^*T$ τότε $\|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall x$

αντίστροφα, αν $\|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall x$
τότε

$$\langle T^*T x, x\rangle = \langle TT^* x, x\rangle \quad \forall x$$

$$(\text{μιγ}) \Downarrow (\text{πόλωση})$$

$S = T^*T - TT^*$

$\langle Sx, x\rangle = 0 \quad \forall x$

$\Downarrow$

$S = 0$

$$\langle T^*Tx, y\rangle = \langle TT^*x, y\rangle \quad \forall x, \forall y$$

$$\Downarrow$$

$$T^*T = TT^* \qquad \blacksquare$$

<u>Πρτ</u> $T = T^* \iff \forall x \in H \ \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$

<u>Απδ</u> $\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle}$

όπως αν $T = T^*$ τότε

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} \Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$$

αντίστροφα, αν $\underline{\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}}$ $\forall x$

τότε

$$\langle T^* x, x\rangle \overset{\text{ορ}}{=} \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle Tx, x\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle T^* x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \quad \forall x$$

$\Downarrow$ (πολ.)

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x, y$$

$\Downarrow$ $T = T^*$

Πρότ $T : H_1 \to H_2$ είναι ισομετρία

$$\Updownarrow$$

$$T^*T = I_{H_1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle Tx, Ty\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1} \quad \forall x, y \in H_1$$

Απόδ T ισομετρία $\Longleftrightarrow$ $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in H_1$

$$\Updownarrow$$

$\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$

$$\langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle \quad ''$$

$\varphi(x,y) = \langle Tx, Ty\rangle$

$\Downarrow$ $\Uparrow$ πόλωση

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x \, \forall y$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle T^*Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad ''$$

$$\Updownarrow$$

$$T^*T = I_{H_1}$$

Παρ S: στο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ισομετρία, $S^*S = I$

αλλά όχι επί

διότι $e_0 \notin S(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$

$$e_0 \perp S(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$$

Ορσ $T : H_1 \to H_2$ unitary αν είναι ισομετρία και επί

Απόδ Αν T ισομετρία, τότε $T^*T = I_{H_1}$

αλλά επειδή είναι επί ο

$T: H_1 \longrightarrow H_2$ ισομετρία (άρα 1-1)

και επί

άρα υπάρχει

$T^{-1}: H_2 \longrightarrow H_1$

γραμμικός

$$T^{-1}T = I_{H_1} = T^*T$$ (διότι T ισομετρία)

$$\Downarrow$$

$$T^{-1}(Tx) = T^*(Tx)$$ $\forall x$ άρα

T επί

$$T^{-1}(y) = T^*(y) \quad \forall y$$

$$\Downarrow$$

$$T^{-1} = T^*$$

άρα

$$TT^* = TT^{-1} = I_{H_2}$$

αντίστροφα, αν $TT^* = I_{H_2}$ και $T^*T = I_{H_1}$

τότε ο T έχει αντίστροφο

και είναι ο T^*

$f \in H^2 \iff \exists (a_n) : \sum |a_n|^2 < +\infty$

ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \quad |z|<1$$

ορίζουμε $(Tf)(z) = z f(z)$,,

πρώτα η πρόταση $Tf \in H^2$ ✓

$$f(z) = \lim_N \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

$$(Tf)(z) = \lim_N \sum_{n=0}^{N} a_n z^{n+1}$$ απλή για $|z|<1$

T γραμμικός. Θέλω να T συνεχής φραγμ.

$\exists M$:

$$\|Tf\| \le \|f\|$$

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k$$

$$\|Tf\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2$$

ο T είναι φραγμ., και μάλιστα ισομετρία

$$(Tf)(z) = z f(z)$$

$$(T^* f)(z) = ? \qquad \frac{1}{z}\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right)$$

κακό.