Συζυγής Τελεστής: Παραδείγματα: 1/11/2016

$H = H_1 = H_2 = \ell^2$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ο.κ. βάση

$$a = (a_n) \in \ell^\infty$$

Έχω ορίσει $D_a \in \mathcal{B}(H)$

$$D_a(x(n)) = (a_n x(n)) \quad \forall x = (x(n)) \in \ell^2$$

$$\iff D_a e_n = a_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ξέρω ότι D_a φραγμένος και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$

θέτω $b = (b_n) = (\bar{a}_n)$ $b \in \ell^\infty$

οπότε ορίζεται $D_b \in \mathcal{B}(H)$

$$D_b(x(n)) = (b_n x(n)) = (\bar{a}_n x(n))$$

$$\boxed{\langle D_b x, y\rangle = \sum_n \bar{a}_n x(n) \overline{y(n)}}$$

$$= \sum x(n) \overline{(a_n y(n))}$$

$$= \langle x, D_a y\rangle \quad \forall x, y \in \ell^2$$

$\exists\, D_a^* = D_b$

(Προσοχή ο T^*, αν $\exists$ είναι! δηλ. αν $S \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$

με $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x \in H_1, y \in H_2$

$= \langle T^* x, y\rangle$

τότε

$$\langle Sx - T^*x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H_2$$

$$\Downarrow$$

$$Sx - T^*x = 0 \quad \forall x \in H_1$$

$$\Downarrow$$

$$S = T^* \,)$$

Άσκηση Αν $T \in B(\ell^2)$

και $T \sim [a_{ij}]$

μέσω της $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle \ \forall i,j$

τότε ερώτημα: είναι αληθές ότι ο πίνακας

$[b_{ij}]$ με $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

ορίζει φραγμένο τελεστή, έστω S

Τότε θα έχω

$$\langle Se_j, e_i \rangle = b_{ij} = \overline{a_{ji}} = \overline{\langle Te_i, e_j \rangle}$$

$$\| \ (*)$$

$$\langle e_j, Te_i \rangle \quad \forall i,j$$

$\Rightarrow$ επειδή οι S, T είναι και οι δύο γραμμικοί και φραγμ.

$(*) \Rightarrow \langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \ \forall x,y \in \ell^2$

<u>δηλαδή</u> $S = T^*$

<u>Παράδ</u> $H_1 = H_2 = L^2([0,1])$ $\quad f \in C([0,1])$

έχω ορίσει

$$M_f : L^2 \to L^2$$

$$M_f(g) = fg \quad , g \in C([0,1])$$

Ξέρω M_f ορίζει φραγμ. τελεστή $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

<u>Ισχυρ.</u> ο M_f^* ορίζεται από τον τύπο

$$M_f^* = M_{\bar f} \quad (\bar f(t) = \overline{f(t)} \ \forall t \in [0,1])$$

<u>Πρώτα</u> ότι η $\bar f$ είναι και αυτή συνεχής (άρα φραγμ.) οπότε ο $M_{\bar f}$ ορίζεται και είναι φραγμ., $\|M_{\bar f}\| = \|\bar f\|_\infty = \|f\|_\infty = \|M_f\|$.

$\forall g,h \in L^2$ πρέπει ν.δ.ο.

$\langle M_{\bar f}\, g, h \rangle \overset{?}{=} \langle g, M_f h \rangle$ αρκεί (πρώτα στις $g,h \in C[0,1]$)

οπότε:

$$\int (M_{\bar f}\, g)(t)\, \overline{h(t)}\, dt = \int \left(\overline{f(t)}\, g(t)\right) \overline{h(t)}\, dt$$

$$= \int g(t)\, \overline{(fh)(t)}\, dt = \langle g, fh \rangle$$

$$= \langle g, M_f(h) \rangle .$$

Επειδή και οι δύο $M_f, M_{\bar f}$ είναι φραγμ. τελεστές και ο $C[0,1]$ πυκνός στον L^2

η ισότητα

$$\langle M_{\bar f}\, g, h\rangle = \langle g, M_f h\rangle \quad \forall g,h \in C[0,1]$$

θα ισχύει και για κάθε $\xi, \eta \in L^2$.

<u>Απόδ</u> $\exists\, (h_n), (g_n)$ από συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\|h_n - \eta\|_2 \to 0, \quad \|g_n - \xi\|_2 \to 0$$

όμως:

$$M_{\bar f}\, g_n \xrightarrow{\|\ \|_2} M_{\bar f}\, \xi, \quad M_f h_n \xrightarrow{\|\ \|_2} M_f \eta$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \langle M_{\bar f}\, g_n, h_n\rangle & \longrightarrow & \langle M_{\bar f}\, \xi, \eta\rangle \\ \| & & \| \quad \forall \xi,\eta \in L^2 \\ \langle g_n, M_f h_n\rangle & \longrightarrow & \langle \xi, M_f \eta\rangle \end{array}$$

Θεώρημα: Αν H_1, H_2 Hilbert

$T : H_1 \to H_2$ γραμμ + φραγμ

$\Rightarrow$

$\exists!\, T^* : H_2 \to H_1$ " "

που

$$\langle T^*y, x\rangle_{H_1} = \langle y, Tx\rangle_{H_2} \quad (*) \qquad \forall x \in H_1,\ y \in H_2$$

Απόδ. $\forall y \in H_2$ θέλω να ορίσω $T^*y \in H_1$ ώστε $(*)$

δηλ. $\forall x \in H_1$ θέλω

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

δηλ. θέλω η : $x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$ να ορίζει ένα $T^*y \in H_1$

Παρατ: η

$$H_1 \longrightarrow H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi_y : x \xrightarrow{\text{γρ+φρ}} Tx \xrightarrow{\text{γρ+φρ}} \langle Tx, y\rangle \quad \text{γραμμ + φραγμ}$$

δηλ. $\forall y \in H_2$: έχω $\varphi_y : H_1 \to \mathbb{C}$ " "

από Riesz, $\exists!\, z_y \in H_1$ ώστε

$$\varphi_y(x) = \langle x, z\rangle \qquad \forall x \in H_1$$

δηλ

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \quad ''$$

Έχω ορίσει $H_2 \longrightarrow H_1$

$y \longrightarrow z_y$

Ισχυρ. ότι γραμμική

Νδο $y + \lambda y' \longrightarrow z_{(y+\lambda y')}$

$\overset{?}{=}$

$z_y + \lambda z_{y'}$

$$\langle x, z_{y+\lambda y'}\rangle = \langle Tx, y + \lambda y'\rangle \quad \forall x \in H_1$$

$$= \langle Tx, y\rangle + \bar{\lambda}\langle Tx, y'\rangle$$

$$= \langle x, z_y\rangle + \bar{\lambda}\langle x, z_{y'}\rangle$$

$$= \langle x, z_y + \lambda z_{y'}\rangle \quad \forall x \in H_1$$

$\Downarrow$

$z_{y+\lambda y'} = z_y + \lambda z_{y'}$ άρα μπορώ να γράψω

$T^*(y) = z_y$

$T^* : H_2 \to H_1$ γραμμ

$$\|T^*y\| = \sup\{|\langle T^*y, x\rangle| : x \in H_1,\ \|x\| \le 1\} \quad (!)$$

$$= \sup\{|\langle y, Tx\rangle| \quad '' \quad '' \}$$

$$\le \sup\{\|Tx\|\|y\| \quad '' \quad ''\}$$

$$= \|y\| \sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\}$$

$$= \|y\|\|T\| \qquad \forall y \in H_2$$

δηλ. $\|T^*\| < +\infty$ και μάλιστα $\|T^*\| \le \|T\|$

(χρησιμοποιούμε ότι σε χώρους με εσωτ. γιν.

$$\|\xi\| = \sup\{ |\langle \xi, \eta\rangle| : \eta \in H_1, \|\eta\| \le 1\}$$

Αρκεί για $\xi \neq 0$

όπου ($|\langle \xi, \eta\rangle| \le \|\xi\| \|\eta\| \le \|\xi\|$

άρα $\sup\{ |\langle \xi, \eta\rangle| : \|\eta\| \le 1 \} \le \|\xi\|$

από την άλλη βάζω $\eta = \dfrac{\xi}{\|\xi\|}$ $(\xi \neq 0)$

$$|\langle \xi, \eta\rangle| = \frac{1}{\|\xi\|}\langle \xi, \xi\rangle = \|\xi\| \quad)$$

καταλήγουμε ότι ορίζεται ο $T^*: H_2 \to H_1$

και $\|T^*\| \le \|T\|$

ισχύει ισότητα διότι $T^{**} = T$

όπως $\|T\| = \|(T^*)^*\| \le \|T^*\|$

Πράγματι:

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2$$

$$\Downarrow$$

$$H_2 \xrightarrow{T^*} H_1 \; : \; \langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$$

$\Downarrow$ ξανά

$$H_1 \xrightarrow{T^{**}} H_2 \; : \; \langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

$$\| \qquad \langle Tx, y\rangle$$

$$\langle T^{**} x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$

$$\Downarrow$$

$$T^{**} = T$$

[Άλλος τρόπος: $\|T^*\| = \sup\{ |\langle T^* y, x\rangle| : \|y\| \le 1, \|x\| \le 1 \}$ ($y \in H_2$, $x \in H_1$)

$= \sup\{ |\langle y, Tx\rangle| \quad " \quad " \}$

$= \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| \quad " \quad " \}$

$= \|T\|$ ∎]

Ιδέα: αντί για το $T: H_1 \to H_2$

θεωρώ

$$H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\varphi_T : (x, y) \longrightarrow \langle Tx, y \rangle$$

- γραμμική ως προς x
- αντιγραμμική ως προς y
- "φραγμένη" γιατί:

$$\|\varphi_T\| := \sup\left\{ |\varphi_T(x,y)| : \underset{\|x\| \leq 1}{x \in B_{H_1}}, \ \underset{\|y\| \leq 1}{y \in B_{H_2}} \right\} < +\infty$$

κατασκευάζουμε την ύπαρξη $T^*: H_2 \to H_1$

με $\langle T^* y, x \rangle = \overline{\varphi(x,y)} \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$

polarization: $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesqui

$$\hat{\varphi} : H \to \mathbb{C} \quad : \hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$$

Ευρεσια της φ μεσω της $\hat{\varphi}$

$$\left[~~\text{προσ}~~ \ |\hat{\varphi}(\lambda x)| = |\varphi(\lambda x, \lambda x)| = |\lambda|^2 |\hat{\varphi}(x)| ! \right]$$

$$\hat{\varphi}(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$$
$$\hat{\varphi}(x-y) \qquad = \varphi(x,x) + \varphi(y,y) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x)$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y) = 2\varphi(x,y) + 2\varphi(y,x)$$

$$\hat{\varphi}(x+iy) - \hat{\varphi}(x-iy) = 2\varphi(x,iy) + 2\varphi(iy,x)$$
$$= -2i\varphi(x,y) + 2i\varphi(y,x)$$
$$i(\varphi(x+iy) - \hat{\varphi}(x-iy)) = 2\varphi(x,y) - 2\varphi(y,x)$$

$$\hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y) + i\hat{\varphi}(x+iy) - i\hat{\varphi}(x-iy) = 4\varphi(x,y)$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right) = \varphi(x,y)$$

$$4\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{3} i^n \hat{\varphi}(x + i^n y)$$

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x,y)| : x,y \in B_H\} \geq \sup\{|\varphi(x,x)| : x \in B_H)$$
$$\| \quad \|\hat{\varphi}\|$$

$$|\varphi(x,y)| \leq \left|\hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \left|\hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| + \left|\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right)\right| + \left|\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right)\right|$$

$$\left(\leq \|\hat{\varphi}\| \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \qquad (\text{δια } |\hat{\varphi}(\lambda x)| = |\varphi(\lambda x, \lambda x)|\right)$$
$$= |\lambda|^2 |\hat{\varphi}(x)|$$

$$\leq \|\hat{\varphi}\| \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2 \right)$$

ταυτοτητα $\#$

$$= \frac{\|\hat{\varphi}\|}{4} \left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2 \right)$$

$$= \|\hat{\varphi}\| (\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \text{οταν } \|x\| \leq 1 \text{ και } \|y\| \leq 1$$
$$\leq 2\|\hat{\varphi}\|$$

$\forall x,y$ στην B_H $\quad |\varphi(x,y)| \leq 2\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : \|x\| \leq 1\}$

$$\hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right) = \varphi(x,y)$$

Αν ξέρω ότι $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ $\forall x$, δηλ. $\hat{\varphi}(x) \in \mathbb{R}$, τότε:

τότε:

$$\operatorname{Re} \varphi(x,y) = \left(\hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$

$$|\operatorname{Re} \varphi(x,y)| \leq \|\hat{\varphi}\| \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\|\hat{\varphi}\|\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

αν $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$

$$\leq \|\hat{\varphi}\|$$

άρα

$$|\operatorname{Re} \varphi(x,y)| \leq \underbrace{\sup\{|\varphi(x,x)| : \|x\| \leq 1\}}_{= \|\hat{\varphi}\|}$$

$\forall x, y$ $\exists \lambda = e^{i\theta}$ ώστε $\underbrace{\lambda \varphi(x,y)}_{= \varphi(\lambda x, y)} = \operatorname{Re} \varphi(x,y)$

οπότε $|\varphi(x,y)| = |\lambda \varphi(x,y)| = \operatorname{Re} \varphi(x,y) \leq \|\hat{\varphi}\| \, \underbrace{\|\lambda x\|}_{= \|x\|} \, \|y\|$

άρα $|\varphi(x,y)| \leq \|\hat{\varphi}\| \, \|x\| \cdot \|y\|$ ∎

B-L-T : ∀ sesquilinear φραγμένη μορφή

$$\varphi : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

∃! $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ώστε

$$\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \qquad (*)$$

$$\forall x \in H_1,\ y \in H_2$$

<u>Απόδ.</u> $\overline{\forall x \in H_1}$ να ορίσω $Tx \in H_2$ ώστε $(*)$

κοιτάω την

$$y \longmapsto \varphi(x,y)$$

$$H_2 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{είναι αντιγραμμική}$$

κοιτάω την

$$\psi_x : y \longmapsto \overline{\varphi(x,y)} \quad \text{είναι γραμμική}$$

και <u>1ον</u> ότι συνεχής

διότι

$$\sup\left\{ \left|\overline{\varphi(x,y)}\right| : \|x\|_{H_1} \le 1,\ \|y\|_{H_2} \le 1 \right\} = \|\varphi\| < +\infty$$

$\Longrightarrow$

$$\left|\overline{\varphi(x,y)}\right| \le \|\varphi\|\,\|x\|\,\|y\|$$

$$|\psi_x(y)| = \left|\overline{\varphi(x,y)}\right| \le \big(\|\varphi\|\,\|x\|\big)\|y\| \qquad \text{φραγμ.}$$

άρα από <u>Riesz</u> $\exists\, z_x \in H_2$ ώστε

$$\psi_x(y) = \langle y, z_x\rangle \qquad \forall y \in H_2$$

δηλαδή

$$\overline{\varphi(x,y)} = \langle y, z_x\rangle \qquad \Rightarrow$$

$$\langle z_x, y\rangle = \varphi(x,y) \qquad \forall y \in H_2$$

Έτσι ορίζει $x \longrightarrow z_x : H_1 \longrightarrow H_2$

όπως πριν δείχνω ότι είναι γραμμική

την λέω T

$$\langle Tx, y\rangle = \varphi(x,y) \qquad \forall x \in H_1,\ y \in H_2$$

$$\Longrightarrow \|T\| = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1 \} = \|\varphi\|$$

Πρόβλ Έστω $T_n : H_1 \to H_2$ (φρ. τελ.) και ως $\sup \|T_n\| < +\infty$
"$=M$"

Θεωρώ τις συναρτήσεις

$$\varphi_n(x,y) = \langle T_n x, y \rangle$$

$\forall x, y$

η (a_n) όπου $a_n = \varphi_n(x,y) \in \mathbb{C}$

είναι φραγμ. διότι

$$|\varphi_n(x,y)| \le \|\varphi_n\| \, \|x\| \, \|y\| \le M \|x\| \|y\|$$

Από Bolzano-Weierstrass $\exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιο $a(x,y)$

Ορ: $a(x,y) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{k_n}(x,y) \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$

Πρέπει $x \mapsto a(x,y)$ είναι γραμμική διότι:

δεν είναι σωστό. Γιατί;

$$\left\{\begin{aligned} a(x+\lambda x', y) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{k_n}(x+\lambda x', y) \\ &= \lim_n \left(\varphi_{k_n}(x,y) + \lambda \varphi_{k_n}(x',y) \right) \\ &= a(x,y) + \lambda a(x',y) \end{aligned}\right.$$

ομοίως η $y \mapsto a(x,y)$ αντιγραμμική

τέλος αφού $\forall \, |\varphi_n(x,y)| \le M \|x\| \|y\|$

και $|a(x,y)| \le M \|x\| \|y\|$

$\forall x, \forall y$

Βρήκαμε έτσι μια φραγμ. sesqui μορφή

οπότε $\exists \, T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$:

$$a(x,y) = \langle Tx, y \rangle$$

δηλαδή

$$\langle Tx, y \rangle = \lim_{(k_n)} \langle T_n x, y \rangle \quad \forall x \in H_1 \;\; \forall y \in H_2$$

ΔΙΟΡΘΩΝΕΤΑΙ;;