Προβλ $\quad A: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$

$$(Af)(t) = t f(t), \quad f \in C([0,1])$$

νδο Α δεν έχει ιδιοτιμές

$\Updownarrow$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda I$ είναι 1-1

$\Updownarrow$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^2$: $(A - \lambda I)(f) = 0$ τότε $f = 0$ του L^2

Αν $\lambda \notin [0,1]$: εύκολο

διότι αν $g(t) = \dfrac{1}{t-\lambda}$ ορίζεται $\forall t \in [0,1]$ και είναι συνεχής

$\Rightarrow$ ορίζω $M_g : L^2 \to L^2$

και

$$(A - \lambda I) M_g = 1_{L^2} = M_g (A - \lambda I)$$

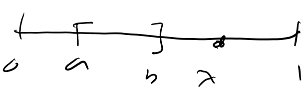
δηλ ο $A - \lambda I$ έχει αντίστροφο άρα είναι 1-1

Έστω $\lambda \in [0,1]$ έχω $(A - \lambda I) f = 0$ νδο $f = 0$

Ισχ $\langle f, \chi \rangle = 0 \quad \forall \chi = \chi_{[a,b]}$

τότε θα έχω: $f = 0$ του L^2

διότι $\operatorname{span}\{\chi_{[a,b]},\ [a,b] \subseteq [0,1]\}$ πυκνό στο L^2



Περίπτωση (i) $\lambda \notin [a,b]$

ορίζω $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t-\lambda}, & t \in [a,b] \\ 0, & t \notin [a,b] \end{cases} = \dfrac{1}{t-\lambda} \chi_{[a,b]}(t)$

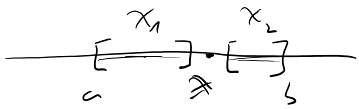
άρα $\chi_{[a,b]}(t) = (t-\lambda)\varphi(t)$

άρα $\chi = (A - \lambda I)\varphi$

$$\langle f, \chi \rangle = \langle f, (A-\lambda I)\varphi \rangle = \langle (A - \lambda I)^* f, \varphi \rangle$$

όμως $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα $\quad = \langle (A - \lambda I) f, \varphi \rangle = 0$

Περίπτωση: $\lambda \in [a,b]$



$\forall \epsilon > 0$

από προηγούμενο:

$\langle f, \chi_1^\epsilon \rangle = 0$ διότι $\lambda \notin [a, \lambda-\epsilon]$

$\langle f, \chi_2^\epsilon \rangle = 0$ " $\lambda \notin [\lambda+\epsilon, b]$

$\Downarrow$

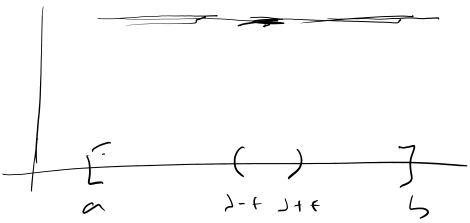
$\langle f, \chi_1^\epsilon + \chi_2^\epsilon \rangle = 0$

Αν $\psi_\epsilon = \chi_1^\epsilon + \chi_2^\epsilon$

έχω $\psi_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, \lambda-\epsilon] \cup [\lambda+\epsilon, b] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

όπως στο $\epsilon \to 0$ τότε $\|\psi_\epsilon - \chi_{[a,b]}\|_2^2$

$$\|\psi_\epsilon - \chi_{[a,b]}\|_2^2 = \|-\chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)}\|_2^2 = 2\epsilon$$



$\langle f, \psi_\epsilon \rangle = 0 \quad \forall \epsilon \to 0$

$\Downarrow$

$$\langle f, \chi_{[a,b]} \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \langle f, \psi_\epsilon \rangle = 0$$

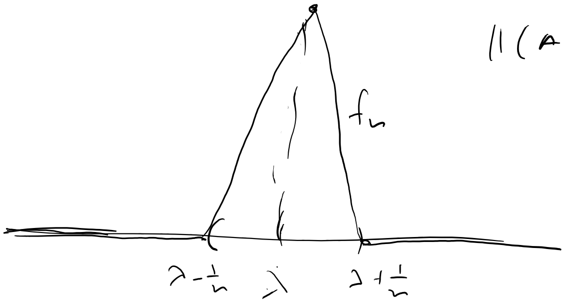
Δείξαμε ότι A δεν έχει ιδιοτιμές

Ισχ. $\forall \lambda \in [0,1]$ είναι "προσεγγιστική ιδιοτιμή"

δηλ. $\exists (f_n)$ στο $f_n \in L^2$ με $\|f_n\|_2 = 1$

και

$$\|(A-\lambda I) f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



↑ προσεγγιστικά ιδιοδιανύσματα

Πάρε όποια g_n συνεχή. Θέλεις, αρκεί: $g_n \neq 0$ και $g_n(t) = 0 \;\; \forall t \notin (\lambda-\frac{1}{n}, \lambda+\frac{1}{n})$

και γράψε:

$$f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_2} \qquad \text{οπότε } \|f_n\|_2 = 1$$

Έχουμε:

$$\|(A-\lambda I) f_n\|_2^2 = \int |(t-\lambda) f_n(t)|^2 dt$$

$$= \int_{\lambda-\frac{1}{n}}^{\lambda+\frac{1}{n}} |t-\lambda|^2 \, |f_n(t)|^2 dt$$

όμως $|t-\lambda|^2 \le \frac{1}{n^2}$ στο $[\lambda-\frac{1}{n}, \lambda+\frac{1}{n}]$:

$$\le \frac{1}{n^2} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} |f_n(t)|^2 dt = \frac{1}{n^2} \|f_n\|_2^2 = \frac{1}{n^2} \to 0$$

Δηλαδή:

Αν $\lambda \notin [0,1]$ τότε $(A-\lambda I)^{-1}$ υπάρχει

Αν $\lambda \in [0,1]$ τότε $(A-\lambda I)$ είναι 1-1, αλλά έχει προσεγγ. ιδιοτιμή

(δες και το αρχείο spmult.pdf)

Πρότ. Αν $|\lambda| > \|A\|$ τότε ο $(A - \lambda I)$ είναι αντιστρέψιμος, και

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

(: σύγκλιση ως προς τη νόρμα $B(H)$)

Απόδ. Θέτω $T = \frac{A}{\lambda}$: $\|T\| = \frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$

όπως αν $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k = I + T + \dots + T^n$

$$(I - T) S_n = S_n (I - T) = I - T^{n+1}$$

και $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \longrightarrow 0$

άρα $\lim_n \|(I - T) S_n - I\| = 0$

Όμως

αρκεί (S_n) είναι βασική !!

Απόδ : $n > m$

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} T^k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|T^k\|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|T\|^k$$

$$\leq \frac{\|T\|^{m+1}}{1 - \|T\|} \longrightarrow 0$$

αφού $\|T\| < 1$

άρα το $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ υπάρχει

και

$$(I - T) S = \lim_n (I - T) S_n = I$$

$$S(I - T) = \lim S_n (I - T) = I$$

οπότε ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος, και S

δηλ.

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k = I = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$$

∎

$\lambda \in \sigma_a(A) \iff \exists (x_n) : \|x_n\| = 1$ και $\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0$

$\lambda \notin \sigma_a(A) \iff \exists \delta > 0 : \|(A-\lambda I)x\| \geq \delta \|x\| \quad \forall x$

Πρτ $A \in B(H)$ (Hilbert) φυσιολογικός τότε $\sigma_a(A) = \sigma(A)$

Απόδ Έστω $\lambda \notin \sigma_a(A)$ νδο $A - \lambda I$ έχει φραγμ. αντίστρ.

Θέτω $T = A - \lambda I$

αφού $\lambda \notin \sigma_p(A)$: T είναι 1-1

οπότε $\exists S : T(H) \longrightarrow H$ γραμμ.

$Tx \longrightarrow x$

Ισχ. S είναι φραγμ.

πράγματι, υπόθ: $\exists \delta > 0 : \forall x, \ \|Tx\| \geq \delta \|x\|$

$\Rightarrow \|STx\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx\|$

οπότε $\|S(Tx)\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx\|$

άρα ο S είναι φραγμ. από $\frac{1}{\delta}$ στο $T(H)$

(ισχύει γενικά $\forall A$)

Ισχ. $T(H)$ είναι πυκνό στον H

διότι αν $y \perp T(H)$ τότε $\forall x \in H$

$\langle y, Tx \rangle = 0 \Rightarrow \langle T^* y, x \rangle = 0$ "

$\Rightarrow T^* y = 0$

αλλά πσ φυσιολογικός, $\|T^* y\| = \|Ty\|$ ..

οπότε $\|Ty\| = 0$ αλλά T είναι 1-1

άρα $y = 0$

οπότε $\overline{T(H)} = H$ άρα η $S : T(H) \longrightarrow H$

$Tx \longmapsto x$

επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή $\tilde{S} : H \to H$

πσ ικανοποιεί $\tilde{S} T x = S T x = x$

$\forall x \in H$

και αν $y = Tx$, $T(\tilde{S} y) = T(\tilde{S} T x) = Tx = y$

άρα $T\tilde{S}(y) = y$

$\forall y \in T(H)$

άρα $\forall y \in H$. $\square$

__Πρτ__ $A = A^*$ τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

__Αποδ__ Αρκεί αν $\lambda \notin \mathbb{R}$ νδο $\lambda \notin \sigma_a(A)$

Όταν $\lambda \notin \mathbb{R}$ τότε $\lambda - \bar{\lambda} \neq 0$

$\forall x \neq 0$:

$$\left| \langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle (A-\bar{\lambda} I)x, x\rangle \right| = \left| (\bar{\lambda}-\lambda)\langle x, x\rangle \right|$$

$$\|$$

$$\left| \langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A-\lambda I)x\rangle \right| = |\bar{\lambda}-\lambda| \, \|x\|^2$$

$$\Rightarrow |\bar{\lambda}-\lambda| \, \|x\|^2 \leq 2 \left| \langle (A-\lambda I)x, x\rangle \right| \leq 2 \, \|(A-\lambda I)x\| \, \|x\|$$

$$\Rightarrow \|(A-\lambda I)x\| \geq \underbrace{\frac{|\bar{\lambda}-\lambda|}{2}}_{=\,\delta} \|x\| \quad \text{για } x \neq 0$$

και για $x = 0$ ισχύει

άρα $\lambda \notin \sigma_a(A)$

Υπενθ. $\forall A = A^*$,

$$\|A\| = \sup\{ |\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1 \}$$

Πρτ. $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ τότε

$$\|A\| = \max\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$$

$$(\text{άρα } \sigma(A) \neq \emptyset)$$

Απόδ. $\exists (x_n) : \|x_n\| = 1 \quad \forall n$

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle| \longrightarrow \|A\|$$

$$\langle Ax_n, x_n\rangle = \langle x_n, Ax_n\rangle \in \mathbb{R}$$

$\exists$ υπακολουθία (y_n) ώστε $\langle Ay_n, y_n\rangle$ να συγκλίνει σε κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| = \|A\|$

Άρα και $\lambda \in \sigma_a(A)$

Απόδ. (κόλπος Halmos)

$$0 \le \|(A-\lambda)y_n\|^2 = \|Ay_n\|^2 + \lambda^2\|y_n\|^2 - 2\lambda\langle Ay_n, y_n\rangle$$

$$\langle (A-\lambda)y_n, (A-\lambda)y_n\rangle$$

$$\le \underbrace{\|A\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda\langle Ay_n, y_n\rangle}_{\downarrow}$$

$$\|A\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2 = 0 \quad (\text{διότι } |\lambda| = \|A\|)$$

Έτσι βρήκα μια (y_n), $\|y_n\| = 1$ και

$$\|(A - \lambda I)y_n\| \longrightarrow 0$$

αυτό σημαίνει $\lambda \in \sigma_a(A)$

Συμπέρασμα:

Αν $A = A^*$ τότε $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$

και ή $\|A\| \in \sigma(A)$ ή $-\|A\| \in \sigma(A)$

$\boxed{}$

Άρα Αν

$$Ax_n = a_n x_n$$

να δείξω $\lambda \in \sigma_p(A) \quad \exists n: \lambda = a_n$

Απόδ: $\exists x \neq 0 \cdots$

$$Ax = \lambda x, \qquad x = \sum \langle x, x_n \rangle x_n$$

δηλ.

$$A\left(\sum \langle x, x_n \rangle x_n\right) = \lambda \sum \langle x, x_n \rangle x_n$$

$$\underline{\sum \langle x, x_n \rangle a_n x_n} = \underline{\sum \langle x, x_n \rangle \lambda x_n}$$

αφού $x \neq 0 \quad \exists n: \langle x, x_n \rangle \neq 0$

οπότε $a_n x_n = \lambda x_n$

άρα $\lambda = a_n$.

Пр<u>едх</u>

$$(u_f g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, \frac{dy}{2\pi}$$

$$g(\cancel{z}) = e^{inx}$$

$$\underline{(u_f e_n)(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{iny}\, dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} x - y &= t \\ x - t &= y \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{in(x-t)}\, dt$$

$$= e^{inx}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right)$$

$$= \underbrace{\langle f, e_n\rangle}_{\hat f(n)}\, e_n(x)$$

$$\underline{u_f e_n = \hat f(n)\, e_n} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$