4/12/2018

$E$ γραμμ. υποχ. $H$

$$H = \bar{E} \oplus E^{\perp} \qquad ( E^{\perp} = \bar{E}^{\perp} )$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} P &= P(\bar{E}) \\ P^{\perp} &= I - P \\ &= P(E^{\perp}) \end{aligned}$$

$$A_{11} : \bar{E} \longrightarrow \bar{E} \ : \ P A\big|_{\bar{E}}$$

$$A_{12} : E^{\perp} \longrightarrow \bar{E} \ : \ P^{\perp} A\big|_{E^{\perp}}$$

$$A(\bar{E}) \subseteq \bar{E} \Longleftrightarrow A_{21} = 0 \qquad A_{21} : \bar{E} \longrightarrow E^{\perp}$$

$$A(E^{\perp}) \subseteq E^{\perp} \Longleftrightarrow A_{12} = 0$$

$E$ ανάγει $A \Longleftrightarrow A_{21} = A_{12} = 0$

$$\Longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = P A\big|_{\bar{E}} + P^{\perp} A\big|_{E^{\perp}}$$

<u>Λήμμα</u> $E$ κλειστός: $A(E) \subseteq E \Longleftrightarrow AP = PAP$ όπου $P = P_E$

$$A(E) \subseteq E \Longrightarrow \forall x \in H : Px \in E \Longrightarrow APx \in E$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$APx = PAPx$$

$$AP = PAP \Longleftrightarrow AP - PAP = 0$$

$$\Longleftrightarrow P^{\perp} AP = 0 \Longleftrightarrow A_{12} = 0$$

Αντίστροφα, αν $AP = PAP$ τότε $\forall x \in E$ $x = Px$

$$Ax = APx = P(APx) \in \bar{E}$$

<u>Ισχ.</u> $E$ είναι $A^{*}$-αναλλοίωτο $\Longleftrightarrow E^{\perp}$ είναι $A$-αναλλοίωτο $\Longleftrightarrow PA = PAP$

Απόδ

Πρότ: $\underline{A^*(E) \subseteq E} \iff A^*P = PA^*P$

$\iff PA = PAP$

$\iff PA - PAP = 0$

$\iff \underline{PAP^\perp = 0}$

$A(E) \subseteq E \iff P^\perp A P = 0$ όπου $P = P(E)$

Τι εφαρμόζω για $E^\perp$; όμως, $P^{\perp\perp} = P(E^\perp)^\perp = P$

$A(E^\perp) \subseteq E^\perp \iff P^{\perp\perp} A P^\perp = 0 \iff \underline{PAP^\perp = 0}$ ■

<u>Εφαρμογή</u>

$E$ ανάγει τον $A \iff A(E) \subseteq E$ και $A(E^\perp) \subseteq E^\perp \iff AP = PAP$ (1) και $PA = PAP$ (2)

$$(1) \wedge (2) \implies AP = PA \implies \underline{PAP = P^2A = PA}$$

$$\Downarrow$$

$$AP^2 = PAP$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{AP = PAP}$$

<u>Συμπέρασμα</u> $E$ ανάγει $A \iff AP = PA$

$E = \bar{E}$ υπόχ. του $H$

$$\{A \in B(H) : A(E) \subseteq E\}$$
$$\|$$
$$\{A \in B(H) : AP = PAP\}$$

[ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ:

αν $\mathcal{Z}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υπόχωρων

ισοδύναμα: " προβολών

$$Alg\,\mathcal{Z} = \{A \in B(H) : AP = PAP \ \forall P \in \mathcal{Z}\}$$

$\underline{A(E) \subseteq E}$ και $\underline{B(E) \subseteq E}$

$$\Downarrow$$

$$AB(E) \subseteq A(E) \subseteq E$$

$I \in Alg\,\mathcal{Z}$ είναι και κλειστή ως

προς ΚΣ σύνολο

$\mathcal{A} = \mathrm{Alg}\,\mathcal{Z}$ δεν είναι αυτοσυζυγής

$A^*$, $A \in \mathcal{A}$

↳ αφήνει τους $E^\perp$ $(E \in \mathcal{Z})$ αναλλοίωτους

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{B}(H) : A(E) \subseteq E \text{ και } A(E^\perp) \subseteq E^\perp \ \forall E \in \mathcal{Z}\}$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$$

$A \in \mathcal{B} \Rightarrow A(E) \subseteq E \ \forall E \in \mathcal{Z} \Longleftrightarrow AP = PAP \ \forall P \in \mathcal{Z}$

$\Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}$

και $\Rightarrow A^*(E) \subseteq E$ " $\Longleftrightarrow PA = PAP \ \forall P \in \mathcal{Z}$

$\Longleftrightarrow A \in \mathcal{A}^*$

άρα, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^* = \{A \in \mathcal{B}(H) : AP = PA \ \forall P \in \mathcal{Z}\}$

: αυτοσυζυγής και ΙΣ κλειστή άλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$

: " von Neumann

ΚΛΕΙΝΕΙ Η ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ]

Γραμμική Άλγεβρα:

$A \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda$ ιδιοτιμή του $A$

$M_\lambda = \ker(A - \lambda \underline{I})$

<u>Πρότ</u> Αν $B \in \mathcal{L}(E)$ και $AB = BA$

τότε $B(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

Απ

$\forall x \in M_\lambda$ τότε $Ax - \lambda x = 0$

$$\Downarrow$$

$$B(Ax - \lambda x) = 0$$

$$\|$$

$$ABx - \lambda Bx = 0$$

άρα $Bx \in \ker(A - \lambda \underline{I})$

$M_\lambda$ είναι όχι μόνο $A$-αναλλοίωτη

αλλά $B$-αναλλοίωτη $\forall B$ με $AB = BA$

: "υπερ-αναλλοίωτη"

## Παράδ

$$T: \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$

$$(x(1), x(2), x(3) \dots) \Rightarrow (0, x(1), \tfrac{1}{2}x(2), \tfrac{1}{3}x(3), \dots)$$

$D_a \qquad a = (\tfrac{1}{n})$

$$(x(1), x(2), \dots) \longrightarrow (x(1), \tfrac{1}{2}x(2), \tfrac{1}{3}x(3), \dots)$$

$$\Big\downarrow S$$

$$(0, x(1), \tfrac{1}{2}x(2), \dots)$$

. ανάλογα αν $a = (\tfrac{1}{n})$

τότε $T = T_a = S D_a$

επειδή $a \in c_0$, ο $D_a$ συμπαγής

άρα $T = S D_a$ συμπαγής

Ισχ. ο $T$ δεν έχει ιδιοτιμές:

Έστω $x \in \ell^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε

$T_a x = \lambda x$ νδο $x = 0$

$$T_a x = (0, a(1)x(1), a(2)x(2), \dots) = \lambda x = (\lambda x(1), \lambda x(2), \lambda x(3), \dots) \iff \left\{\begin{array}{ll} 0 = \lambda x(1) & \text{και} \\ a(n)x(n) = \lambda x(n+1) & \forall n \end{array}\right.$$

- $\lambda \neq 0 \Rightarrow x(1) = 0 \Rightarrow \lambda x(2) = a(1)x(1) = 0 \Rightarrow x(2) = 0$

  κ.λ.π. $\forall\, x(n) = 0$

- $\lambda = 0 \Rightarrow a(n)x(n) = 0 \ \forall n$

  αν υποθέσω (όπως και εδώ $a(n) = \tfrac{1}{n}$)

  ότι $\forall\, a(n) \neq 0$ $\forall n$, τότε

  $x(n) = 0 \quad \forall n$

Παρ/γ

$A \in B(L^2([0,1]))$ : $(Af)(t) = t f(t) \quad \forall f \in L^2$

Ισχ. δεν έχει καθόλου ιδιοτιμή

[illegible] $A = A^*$

Έστω $f \in L^2$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με

$Af = \lambda f$ τότε $f = 0$

ας υποθέσω πρώτα $f$ συνεχής:

$\Longrightarrow (Af)(t) = \lambda f(t) \quad \forall t \in [0,1]$

$t f(t) = \lambda f(t)$ ''

$\Longrightarrow (t-\lambda) f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Downarrow$

$\longrightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \neq \lambda$

αλλά είναι συνεχής, άρα $f(\lambda) = 0$

Αν $f \in L^2$ όχι συνεχής ??? Ξέρω ότι $\exists (f_n)$ από συνεχείς: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ (πώς;)

$Af = \lambda f \iff f \in \ker(A - \lambda I)$

να περάσουμε ότι $f$ = το μηδενικό στοιχείο του $L^2$;

Με θεωρία μέτρου: αν $f \in L^2$ και $(A-\lambda)f = 0$

τότε $(t-\lambda) f(t) = 0$ σχεδόν $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow f(t) = 0$ σχ. $\forall t \neq \lambda$ (ως προς μ. Lebesgue $m$)

$\Rightarrow f(t) = 0$ σχ $\forall t \in [0,1]$ γιατί $m(\{\lambda\}) = 0$ ∎

$S : \ell^2 \to \ell^2$ δεν έχει ιδιοτιμές
αλλά ο $S^*$ έχει ένα σωρό ιδιοτιμές

$$S^* x = \lambda x \qquad S^*(x(1), x(2), \dots) = (x(2), x(3), \dots)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x(2), x(3), \dots) = (\lambda x(1), \lambda x(2), \dots)$$

$x(2) = \lambda x(1)$, $x(3) = \lambda x(2) = \lambda^2 x(1)$ και $x(n+1) = \lambda^n x(1)$ $\forall n$

$$x = (x(1), \lambda x(1), \lambda^2 x(1), \dots) = x(1)(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$$

και πρέπει $x \in \ell^2$ δηλ $\sum |\lambda^n x(1)|^2 < +\infty$

αλλά $x \neq 0 \iff x(1) \neq 0$ άρα:

$$\Updownarrow$$

$$\sum |\lambda|^{2n} < +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$|\lambda| < 1$$

<u>Συμπέρασμα</u>: αν $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1$ τότε δεν είναι ιδιοτιμή του $S^*$

και αν $|\lambda| < 1$ τότε είναι ιδιοτιμή του $S^*$ με ιδιοδιάνυσμα

$$x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$$

$\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$ είναι ιδιοδιανύσματα του $S^*$ έχει κλειστή γραμμική θήκη $= \ell^2$

(<u>άσκ.</u>)

Παρ. $\forall a \in \ell^\infty$ τότε ο τελεστής

$$D_a : \ell^2 \to \ell^2$$

$$D_a(x(1), x(2), \dots) = (a(1)x(1), a(2)x(2), \dots)$$

Είναι φραγμ. γραμμικός

$$(D_a^* = D_{\bar a})$$

και έχει ιδιοδιανύσματα, τα $e_n$

$$D_a e_n = a(n) e_n$$

τα οποία είναι $\perp$ ανά δύο και παράγουν τον $\ell^2$.

[Άρα δεν υπάρχουν άλλες ιδιοτιμές.]

Ορισμός Ένα $A \in B(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος όταν $\exists$ μια $\boxed{\text{ον}}$ βάση του χώρου $H$ από ιδιοδιανύσματα του $A$

δηλ. $\exists \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\exists\, a(n) \in \mathbb{C}$

ον βάση του $H$ ώστε: $A x_n = a(n) x_n \ \forall n$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \quad |a(n)| = \|a(n)x_n\| = \|Ax_n\| \le \|A\|$$

άρα $(a(n))$ είναι φραγμ. από $\|A\|$

μάλιστα $\sup_n |a(n)| = \|A\|$ (άσκ.)

Αν $U : H \to \ell^2$ τότε επειδή $\{x_n\}$ και $\{e_n\}$ είναι ο.κ. βάσεις

$x_n \to e_n \ \forall n$ ο $U$ είναι unitary

$$U(\overbrace{\textstyle\sum \langle x, x_n\rangle x_n}^{x}) = (\langle x, x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ux\| = \|(\langle x, x_n\rangle)\|_{\ell^2}$$

και

$$\begin{array}{ccccc} x_n & H & \xrightarrow{U} & \ell^2 & e_n \\ \downarrow & \downarrow A & & \downarrow & \downarrow D_a \\ a(n)x_n & H & \xrightarrow{U} & \ell^2 & a(n)e_n \end{array}$$

δηλ. $A = U^{-1} D_a U = U^* D_a U$

$A$ ισοδύναμος με τον $D_a$

unitarily equivalent

Αντίστροφα Ένα $A$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν

<u>Απόδ.</u> $\exists\ (a(n)) \in \ell^{\infty}$ .. και ένα

$U : H \to \ell^2$ unitary ώστε

$$A = U^* D_a U \implies A^* = U^* D_a^* U = U^* D_{\bar a} U$$

άρα $A^* A = U^* D_{\bar a} U U^* D_a U$

όμως $U^* = U^{-1}$, άρα: $\Downarrow$

$$U^* D_{\bar a} D_a U = U^* D_a D_{\bar a} U$$

$$\| $$

$$U^* D_a U U^* D_{\bar a} U$$

$$\| $$

$$A A^* \quad \blacksquare$$

Δεν είναι αλήθεια σε απειροδιάστατους χώρους ότι

ότι φυσιολογικός $\implies$ διαγωνοποιήσιμος

<u>π.χ.</u> $(Af)(t) = t f(t)$ είναι φυσιολογικός

όχι διαγωνοποιήσιμος (δεν έχει

καθόλου ιδιοδιανύσματα!)

Όμως για συμπαγείς ....