1η Δεκ

Εναλλ. Fredholm

(Fredholm Alternative)

$A \in \mathcal{K}(H)$ και $\lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\}$ τότε $\lambda \in \sigma_p(A)$

με άλλα λόγια:

($\lambda \neq 0$) Αν $A-\lambda I$ είναι 1-1 τότε $\exists (A-\lambda I)^{-1}$

$\iff$ $\frac{A}{\lambda} - I$ είναι 1-1 τότε αντιστρέψιμη

Θεώρημα $K: H \to H$ συμπαγής τότε ΔΥΟΙΝ ΘΑΤΕΡΟΝ:

ή $\forall y \in H$

η εξίσωση

$$x - Kx = y$$

έχει μοναδική λύση

ή άλλως η ομογενής

$$x - Kx = 0$$

έχει (πεπερασμένο πλήθος) γραμμ. ανεξ. λύσεις.

Απόδ.

Αν $x-Kx=0$ έχει $\neq 0$ λύση τότε $\exists x \neq 0$ ώστε $x \in \ker(I-K)$

όμως K συμπαγής, ο $\ker(I-K) = M_\lambda(K)$ με $\lambda=1$ έχει αναγκαστικά $\dim < \infty$

(αλλιώς θα $\exists (x_n)$ o.k. ώστε $Kx_n = x_n$ $\forall n$

όπου $\|Kx_n - Kx_m\| = \|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ (για $n \neq m$)

$\Rightarrow (Kx_n)$ δεν θα έχει συγκλ. υπακ.

Αλλιώς η $x-Kx=0$ έχει μόνο τη λύση $x=0$

άρα ο τελεστής $I-K: H \to H$ είναι 1-1

Θ.δ.ο. $I-K$ έχει φραγμ. αντίστροφο

Υπ. $I-K$ είναι 1-1

(i) Αφού $K\in\mathcal{K}(H)$, $\exists\ F\in\mathcal{F}(H)$: $\|K-F\|<1$

οπότε $K_1 = K-F$ έχει $\|K_1\|<1$

οπότε $I-K_1$ έχει φραγμ. αντίστροφο

(τον $\sum_{n=0}^{\infty}(K_1)^n$)

(ii) ορίζω $G = F(I-K_1)^{-1}\in\mathcal{F}(H)$

Ισχ. $I-G$ είναι 1-1

Απόδ. $(I-G)(\underbrace{I-K_1}_{\text{αντιστρ}}) = (I-K_1) - G(I-K_1)$

$= I-K_1-F$

$= I-(K_1+F) = \underbrace{I-K}_{1-1}$

$(I-G) = (I-K)(I-K_1)^{-1}$ είναι 1-1 $\boxed{}$

(iii) Αναγκαία $H_0 = \mathrm{Im}(G)\subseteq H$ πεπερ. διάστασης

Θέτω $T:(I-G)|_{H_0}$. Αφού $\mathrm{Im}(G)\subseteq H_0$ έχω

$T: H_0\to H_0$ και T είναι 1-1, αλλά αφού $\dim H_0<\infty$

έπεται ότι T 1-1 και επί.

δηλαδή $\forall v\in H_0\ \exists u\in H_0$ ώστε $(I-G)u=v$

οπότε $\forall y\in H$ αν $v=Gy\in H_0$ τότε $\exists u\in H_0$

ώστε $(I-G)u=Gy$

Τώρα: $(I-G)(u+y) = (I-G)u + (I-G)y = Gy + y - Gy = y$

Έδειξα ότι: $\forall y\in H\ \exists x=u+y\in H$ ώστε $(I-G)x=y$

δηλαδή $(I-G)$ είναι επί το H

οπότε $(I-K) = (I-G)(I-K_1)^{-1}$ είναι 1-1

$H\to H$ και επί

και φραγμ.

(iv) Θέτω $Y=(I-K)^{-1}: H\to H$ γραμμική

Ν.δ.ο. ότι Y φραγμ.

Απόδ. Έστω όχι: $\exists\ (x_n)$: $\|x_n\|=1$ και $\|Yx_n\|\geq n$ $\forall n$

ορίζω $y_n = \dfrac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$: $\|y_n\|=1$ $\forall n$

αφού K συμπαγής, η (Ky_n) έχει συγκλίνουσα υπακ. (Ky_{m_n}). Έστω $z=\lim_n Ky_{m_n}$

Έχω:

$$\|y_n\|=1 \quad \text{και} \quad \|Ky_{m_n} - z\| \to 0$$

όμως:

$$\|(I-K)y_{m_n}\| = \left\|(I-K)\frac{Yx_{m_n}}{\|Yx_{m_n}\|}\right\|$$

$$= \left\|\frac{x_{m_n}}{\|Yx_{m_n}\|}\right\| \le \frac{1}{m_n}$$

(αφού $\|Yx_n\| \geq n \ \forall n$)

άρα $(I-K)y_{m_n} \to 0$

αλλά $Ky_{m_n} \to z$ $\Longrightarrow$ $y_{m_n} \to z$, άρα $\|z\|=1$

$\Downarrow$ K συνεχής

$$\begin{tikzcd} Ky_{m_n} \arrow[r] \arrow[d] & Kz \arrow[d] \\ z \arrow[r] & Kz = z \end{tikzcd}$$

άρα $z \in \ker(I-K) = \{0\}$ άτοπο αφού $\|z\|=1$ ∎

Παράδ.

$$x - Kx = y \qquad H = L^2([0,1])$$

ή $C([0,1])$

$$x(t) - \int k(t,s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

όπου $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής

διακριτό ανάλογο:

$$x_n - \sum_{m=1}^{N} k(n,m)\, x_m = y_n \qquad (n = 1 \ldots N)$$

ή έχει $\forall y$ μοναδική λύση x.

ή αλλιώς η ομογενής

$$\int k(t,s)\, x(s)\, ds = x(t) \quad \forall t$$

έχει πεπερ. πλήθος γραμμ. ανεξ. λύσεων.

Πρότ Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $\sigma(A)\setminus\{0\}$ αποτελείται από ιδιοτιμές και είναι πεπερασμένο ή μηδενική ακολουθία.

Απόδ Ότι $\forall \lambda \in \sigma(A)\setminus\{0\}$ είναι ιδιοτιμή το δείξαμε
(Αν ο $\frac{A}{\lambda}$ είναι 1-1 τότε ο $\frac{A}{\lambda} - I$ θα έχει φραγμ. αντίστροφο)

Άρα $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ πεπερ.

Αναδιατύπωση:

Πρότ $A \in \mathcal{K}(H)$, $\epsilon > 0$ τότε $\nexists$ άπειρο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα x_n με ιδιοτιμές λ_n που $|\lambda_n| \geq \epsilon$.

Απόδ Προς άτοπο, υποθέτω ότι υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα x_n με $Ax_n = \lambda_n x_n$ και $|\lambda_n| \geq \epsilon$ $\forall n$

$\forall n$, $N_n := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subsetneq N_{n+1} \subsetneq N_{n+2}$

$\forall n$

Ισχ $A(N_n) \subseteq N_n$ διότι $A \sim$
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$(A - \lambda_n I)(N_n) \subseteq N_{n-1}$

Απόδ

Έστω $x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \in N_n$

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k x_k \in N_n$$

και $$(A - \lambda_n I)x = \sum_{k=1}^{n} c_k(\lambda_k - \lambda_n)x_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\lambda_k - \lambda_n)x_k \in N_{n-1}$$

Όμως $N_{n-1} \subsetneq N_n$ άρα $\exists\, y_n \in N_n$, $\|y_n\| = 1$ ώστε $y_n \perp N_{n-1}$

Αν $n > m$ έχω:

$$Ay_m \in N_m \subseteq N_{n-1}$$

$$(A - \lambda_n I)y_n \in N_{n-1}$$

άρα

$$Ay_m - Ay_n + \lambda_n y_n \in N_{n-1} \text{ άρα } \perp \lambda_n y_n$$

$$(Ay_n - \lambda_n y_n - Ay_m) \perp (\lambda_n y_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ay_n - \lambda_n y_n - Ay_m + \lambda_n y_n\|^2 = \|Ay_n - \lambda_n y_n - Ay_m\|^2 + \|\lambda_n y_n\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ay_n - Ay_m\|^2 \geq \|\lambda_n y_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \geq \epsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ay_n - Ay_m\| \geq \epsilon \quad \forall\, n > m$$

οπότε δεν μπορεί η (Ay_n) να έχει συγκλ. υπακ.

Άτοπο.

0 Συναρτησιακός Λογισμός (Functional Calculus)

Ιδέα: Αν $A \in \mathcal{B}(H)$

και $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C} \xrightarrow{\text{ή}} \mathbb{C}$

να ορίσω $f(A): H \longrightarrow H$ γραμμ. φρ. ώστε

να "υπολογίζω" το $f(A)$

Δύο προσεγγίσεις: (I) και (II)

(I) <u>Πρότ</u> Έστω $\dim H < +\infty$

και A φυσιολογικός

τότε $A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n P_n$ όπου $\{\lambda_1 \ldots \lambda_N\} = \sigma_p(A) = \sigma(A)$

P_n = η προβολή

και $I = \sum_{n=1}^{N} P_n$ στον υπόχωρο M_{λ_n}

$\forall f: \sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ ορίζω

$$A_f = \sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n) P_n$$

δηλ. $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix}$

$A_f \sim \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_N) \end{bmatrix}$

(II) Ο άλλος τρόπος: Έστω f ένα πολυώνυμο

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$$

μπορώ να ορίσω

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$$

$$= c_0 I + c_1 A + c_2 \overset{A \circ A}{A^2} + \cdots + c_n A^n$$

<u>Πρότ</u> $A_f = f(A)$ όταν f πολυων., $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολ., $\dim H < +\infty$.

<u>Απόδ</u> $A^2 = A\left(\sum \lambda_n P_n\right) = \left(\sum \lambda_m P_m\right)\left(\sum \lambda_n P_n\right)$

όμως $P_n P_m = 0$ για $n \neq m$, άρα $A^2 = \sum \lambda_n^2 P_n$.

Επαγωγικά $A^k = \sum_n \lambda_n^k P_n \quad \forall k$

επομένως

$$f(A) = \sum_{k=0}^{N} c_k A^k = \sum_n \left(\sum_k c_k \lambda_n^k\right) P_n$$

$$= \sum_n f(\lambda_n) P_n = A_f. \quad \blacksquare$$

(Επεκτάσεις σε $\dim H = +\infty$)

(1) αν A αυτοσυζυγής και συμπαγής, από φασμ. θεώρ.

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

(η σειρά συγκλίνει στη $\| \ \|_{B(H)}$)

όπως, αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη τότε ορίζουμε

$$A_f x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \forall x \in H$$

και αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει $\forall x \in H$ και ορίζεται $A_f \in B(H)$. Αλλά για να είναι συμπαγής πρέπει $\lim_{n\to\infty} f(\lambda_n) = 0$

(2) $A \in B(H)$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ συγκλίνει } \forall z \in \mathbb{C}$$

απόλυτα και ομοιόμορφα

στα συμπαγή $\subseteq \mathbb{C}$

όπως επειδή $\sum \|c_n A^n\| \leq \sum |c_n| \|A\|^n < +\infty$,

η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ συγκλίνει στη $\| \ \|_{B(H)}$

(ΘΝΞ, Σ.Π.!) και ορίζει $f(A) \in B(H)$

[Πιο γενικά, αν f ολόμορφη σε ένα ανοικτό $V \subseteq \mathbb{C}$ με $V \supseteq \sigma(A)$, τότε:

Θεώρ Cauchy: $\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)(w - z)^{-1} dw}$

όπως ορίζω

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)(wI - A)^{-1} dw$$

κρίσιμη ιδιότητα:

$$f(A)\, g(A) = (fg)(A)$$

]

(3) Επέκταση όταν $A = A^*$ (οπότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$)

έχω ήδη ορίσει $f(A)$ με f πολυώνυμο

Ξέρω $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] := J$

οπότε αν $f \in C(J)$

από Weierstrass $\exists (f_n)$ ακολουθία

πολυωνύμων $\|f - f_n\|_J \to 0$

$$\| \qquad \sup\{|f(t) - f_n(t)| : t \in J\}$$

Θα μπορούσα ίσως να πετύχω

$(f_n(A))$ να είναι βασική στη $\| \ \|_{B(H)}$

οπότε να ορίσω

$$f(A) = \lim_n f_n(A)$$

$\downarrow$ πολυωνυμικές συναρτήσεις στο J

$$\Phi_p : (\mathcal{P}(J), \| \ \|_J) \longrightarrow (B(H), \| \ \|)$$
$$p \longrightarrow p(A)$$ γραμμική απεικόνιση

διότι $\Phi(p + \lambda q) = (p + \lambda q)(A)$
$= p(A) + \lambda q(A)$

Αν δείξω ότι είναι και συνεχής

~~τότε επεκτείνεται σε συνεχή~~ γραμμ.

απεικόνιση:

$$\Phi_c : (C(J), \| \ \|_J) \longrightarrow (B(H), \| \ \|)$$
$$f \longmapsto f(A)$$

<u>ΚΡΙΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ</u> (όταν $A = A^*$): $\|p(A)\|_{B(H)} \leq \|p\|_J$ $\forall$ πολυωνυμ. p

<u>Απόδ</u> (Ed Nelson) Έστω $x \in H$, $x \neq 0$

$M = \text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots A^n x\}$ όπου $n = \deg p$.

οπότε $p(A)x \in M$

$E = \text{proj}(M)$

<u>Παρ</u> $Ex = x$ και αν $k \leq n$, τότε $EA^k Ex = A^k x$

διότι $x = Ex$ και $EA^k x = A^k x$ (αφού $x, A^k x \in M$) άρα

$Ax = AEx = EAEx$ (αφού $AEx \in M$) άρα $A^2 x = A(EAEx) = EA(EAE)x$

αφού $A(EAEx) \in M$) δηλ. $A^2 x = (EAE)^2 x$, ομοίως $A^k x = (EAE)^k x$, άρα

$p(A)x = \sum c_k A^k x = \sum c_k (EAE)^k x = p(EAE)x.$

Όμως ο $EAE|_M$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο πεπερ. διάστασης

άρα διαγωνοποιείται

οπότε $\exists\ E_i$ $\perp$ ανά δύο προβολές $E_i \le E$

και $\lambda_i \in \mathbb{R}$

ώστε $EAE = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i E_i \qquad m \le n+1$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{p(EAE) = \sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i) E_i}$$

λ_i ιδιοτιμές EAE

$|\lambda_i| \le \|EAE\| \le \|A\|$

$\lambda_i \in J$

$$\Rightarrow \underline{\|p(EAE)\|} = \max\{|p(\lambda_i)| : i=1..m\} \le \underline{\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in J\}} = \|p\|_J$$

Επομένως:

$$\underset{\|}{\|p(EAE)x\|} \le \|p(EAE)\|\,\|x\| \le \|p\|_J\,\|x\|$$

$$\|p(A)x\| \le \|p\|_J\,\|x\|$$

αλλά το x είναι τυχαίο άρα $\|p(A)\| \le \|p\|_J$ $\square$

• Έχω δείξει ότι η

$$\varphi_p : (\mathcal{P}(J), \|\ \|_J) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \|\ \|)$$
$$p \longmapsto p(A)$$

είναι γραμμική και συνεχής (συστολή)

επειδή επεκτείνεται σε γραμμική συστολή

$$\varphi_c : (C(J), \|\ \|_J) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \|\ \|)$$
$$f \longmapsto f(A)$$

Με άλλα λόγια

αν $f \in C(J)$, πάρε οποια (f_n) πολυώνυμα

ώστε $\|f - f_n\| \to 0$

και όρισε:

$$f(A) := \lim_n f_n(A)$$

(το όριο $\exists$ και είναι ανεξάρτητο της (f_n) να συγκλίνει στην f)

Έχω: $(f + \lambda g)(A) = f(A) + \lambda g(A)$

$$(fg)(A) = f(A)\,g(A)$$

__Αποδ.__ Αν $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα
(f_n, g_n πολυώνυμα) τότε στο J
$$f_n g_n \to fg \quad \text{'' ''}$$
οπότε
$$\|(f_n g_n)(A) - (fg)(A)\| \to 0$$
όμως
$$(f_n g_n)(A) = f_n(A) g_n(A)$$ διότι f_n, g_n πολυώνυμα
(εύκολη άσκηση)

οπότε $(fg)(A) = \lim_n f_n(A) g_n(A)$ όμως $= \left(\lim_n f_n(A)\right)\left(\lim_n g_n(A)\right) = f(A)g(A)$

Φ_c : ομομορφισμός αλγεβρών
μάλιστα $*$- αλγεβρών

και $\Phi_c(\bar f) = (\Phi_c(f))^*$

__δηλ.__ $\bar f(A) = f(A)^*$

__Αποδ.__ αρκεί προφανώς για πολυώνυμα:

αν $f(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$

τότε $f(A)^* = \sum (c_k A^k)^* = \sum \bar{c}_k A^k$
(διότι $A = A^*$)
$= \bar f(A)$

__Πρότ.__ Στην πραγματικότητα, ισχύει:
$\forall f$ πολυώνυμο
$$\|f(A)\| = \sup\{\, |f(t)| : t \in \sigma(A) \,\}$$

οπότε η $f \mapsto f(A)$
είναι ισομετρία
$$C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H).$$

Απόδ. Έχουμε δείξει: όταν $A = A^*$
$\|A\| = \sup\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$

$\Downarrow$

αν p ένα πολυώνυμο με πραγμ. συντ.
ώστε $p(A) = p(A)^*$

$\|p(A)\| = \sup\{ |\mu| : \mu \in \sigma(p(A)) \}$

Εδώ: $\sigma(p(A)) = \{ \mu \in \mathbb{C} : \mu 1\!\!1 - p(A)$ όχι αντιστρ$\}$
όμως ισχυρίζομαι ότι
$= \{ p(\lambda) \in \mathbb{C} : \lambda 1\!\!1 - A$ όχι αντιστρ$\}$
δηλ. $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$
οπότε
$\|p(A)\| = \sup\{ |p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A) \}$
$= \|p\|_{\sigma(A)}$.

Αν τώρα το p έχει μιγαδ. συντελεστές,
τότε ο $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ είναι φραγμένος τελεστής

$p(A)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{c_k} A^k$

κόλπο: $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\|$

όμως
$p(A)^* p(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{c_k} A^k \right) \left(\sum_{m=0}^{n} c_m A^m \right)$

$= \sum_{k,m=0}^{n} \overline{c_k} c_m A^{k+m}$

είναι πολυώνυμο με πραγμ. συντελεστές. Πράγματι,
$(\overline{\overline{c_k} c_m}) = c_k \overline{c_m} = \overline{c_m} c_k$ είναι ο συντελεστής του A^{m+k} ... ίδια
$= A^{k+m}$, δηλ. είναι ο $\overline{c_k} c_m$ άρα $(\overline{\overline{c_k} c_m}) = \overline{c_k} c_m$ δηλ. $\in \mathbb{R}$.

Οπότε, από τη προηγούμενη πρόταση

ως $q(t) = \overline{p(t)}\, p(t)$, το q έχει

πραγμ. συντελεστές, και άρα

$$\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$$

$$= \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

$$= \sup\{|p(\lambda)|^2 : \lambda \in \sigma(A)\}$$

$$= \left(\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}\right)^2 \quad \blacksquare$$

Μένει να δείξω τον Ισχυρισμό:

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

(παράδ: Αν $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$p(A) \sim \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

άρα $\sigma_p(p(A)) = \{p(\lambda_1) \dots p(\lambda_n)\}$

Γενικά, έχουμε το αλγεβρικό!

<u>Λήμμα</u> <u>φασμ. απεικ.</u> $\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$

<u>Απόδ</u> $\mu \notin \sigma(p(A)) \iff \mu I - p(A)$ έχει αντίστροφο

γράφω $= q(A)$

όπου $q(t) = \mu - p(t)$ πολυώνυμο

(Θεμ. Θεωρ. Άλγεβρας) $= c(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n)$

$$q(A) = (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\dots(A-\lambda_n I)$$

παρατηρώ ότι $q(A)$ αντιστρέφεται ανν <u>κάθε</u> $A-\lambda_i I$ αντιστρέφεται.

Οπότε: $\mu \in \sigma(p(A)) \iff$ κάποιο λ_i ανήκει στο $\sigma(A)$.

όμως $\lambda_i =$ ρίζες του q

δηλ: είναι τα $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία $q(\lambda)=0$ δηλ. $p(\lambda)=\mu$.

Τελικά: $\mu \in \sigma(p(A)) \iff \exists\, \lambda \in \sigma(A) : p(\lambda) = \mu$. $\blacksquare$