13 Δεκ 2018

$\lambda = (\lambda(n)) \in \ell^\infty$ $\{x_n\}$ ον ακολουθία σε K

$\{y_n\}$ - - - - H

$$A := \text{“}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\, x_n y_n^* \text{”}$$

$\forall x \in H$ $\quad A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, y_n\rangle x_n$ (σχ: συγκλίνει στον K)

Απόδ $\quad \left\| \sum_{n=m}^{N} \lambda_n \langle x, y_n\rangle x_n \right\|_K^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{n=m}^{N} |\lambda_n \langle x, y_n\rangle|^2 \|x_n\|_H^2$

$\perp$ ανά δύο

$$\le \|\lambda\|_\infty^2 \sum_{n=m}^{N} |\langle x, y_n\rangle|^2$$

όμως (y_n) ον: Bessel $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$

οπότε $\forall \varepsilon>0$ μπορώ να βρω m_0 ώστε $N \ge m \ge m_0 \Longrightarrow \sum_{n=m}^{N} |\langle x, y_n\rangle|^2 < \varepsilon^2 / \|\lambda\|_\infty^2$

άρα τα μερ. αθρ. $\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, y_n\rangle x_n\right)$

είναι βασική ακολουθία στον K

Ονομάζω $A(x)$ το lim

αν ορίσω $A_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n y_n^*$

ο A_N είναι μια χαρά

γραμμ + φραγμ πεπερασμ. τάξης

και

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_n y_n^*)(x) = \lim_{N\to\infty} A_N(x)$$

οπότε η απεικ. $A: H \to K : x \to A(x)$

είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Είναι όμως και φραγμ.

διότι όπως έδειξα:

$$\|A_N(x)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |\langle x, y_n\rangle|^2$$

$$\le \|\lambda\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{N} |\langle x, y_n\rangle|^2$$

$$\le \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|_H^2$$

άρα $\forall x \in H$,

$$\|A(x)\|_K = \lim_{N\to\infty} \|A_N x\|_K \le \|\lambda\|_\infty \|x\|_H$$

οπότε $A \in \mathcal{B}(H, K)$ και μάλιστα

$\|A\| \le \|\lambda\|_\infty$ (και $=$)

Παρ: Αν δοκιμάσω με τριγωνική ανισότητα:

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n y_n^*$$

$$\|A_N\| \le \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \underbrace{\|x_n y_n^*\|}_{\|x_n\|\|y_n\| = 1}$$

$$\Rightarrow \|A_N\| \le \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \quad : \text{κακή εκτίμηση}$$

ενώ με ΠΘ: $\|A_N\| \le \max_{n \le N} |\lambda_n| \le \|\lambda\|_\infty$

Παρ: A = κατά σημείο όριο των A_N

δηλ. $\forall x \in H$

$$A(x) = \lim_{N \to \infty} A_N(x)$$

η σύγκλιση δεν είναι εν γένει ομοιόμορφη στο B_H

πχ αν πάρω $\lambda_n = 1$, $\forall n$ $x_n = y_n$, (ορθοκανονικά)

$$A_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x_n x_n^*(x) = \sum_{n=1}^{N} P[x_n](x)$$

(όπου $P[x_n]$ η προβολή στο span$\{x_n\}$)

$$= P[x_1 \dots x_N](x)$$

$\downarrow$ κατά σημείο

$$P[\overline{span}\{x_n\}](x)$$

άρα $A_N - A_M = \sum_{n=M+1}^{N} x_n x_n^*$

$$= P[x_{M+1}, x_{M+2}, \dots x_N]$$

$$\Rightarrow \|A_N - A_M\| = 1$$

Αν όμως υποθέσω $(\lambda_n) \in c_0$ τότε $\|A_N - A\| \to 0$ επομένως A είναι συμπαγής.

Ότι $(\lambda_n) \in c_0$ και (A_N) συγκλίνει στη νόρμα του $B(H, K)$

<u>Απόδ</u> $\forall x \in H$,

$$\left\| \sum_{n=M}^{N} \lambda_n x_n y_n^*(x) \right\|_K^2$$

$$= \left\| \sum \lambda_n \langle x, y_n \rangle x_n \right\|^2$$

$$\overset{(\text{Πυθ})}{=} \sum_{n=M}^{N} |\lambda_n|^2 |\langle x, y_n \rangle|^2 \qquad (*)$$

Έστω $\epsilon > 0$. Άρα $\lambda_n \to 0$ $\exists N_0$: $\forall N \geq N_0$ $|\lambda_N| < \epsilon$

Όταν $N > M \geq N_0$

$$(*) < \epsilon^2 \sum_{n=M}^{N} |\langle x, y_n \rangle|^2$$

$$\leq \epsilon^2 \|x\|^2$$

οπότε

$$\|A_N(x) - A_{M-1}(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$\Downarrow$$

$$\|A_N - A_{M-1}\| \leq \epsilon. \quad \blacksquare$$

Φασμ. Θεώρημα: 2η μορφή:

Υπο: $A \in \mathcal{K}(H)$ αυτοσυζυγής

$\{M_\lambda\}$ $\perp$ ανά δύο, χωρίς βλάβη

και παράγουν τον H

Σχόλιο: $P_\lambda = P(M_\lambda)$ είναι $P_\lambda P_\mu = 0$ με $\lambda \neq \mu$

χωρίς βλάβη

και $\forall$ αρίθμηση

(αφού $\{M_n\}$ παράγουν H) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \quad \forall x \in H$

$\Downarrow$ A συνεχής

$$\sum_{n=1}^{\infty} A P_n x = A x$$

Όμως $P_n(x) \in M(\lambda_n)$: $A(P_n x) = \lambda_n P_n x$

οπότε

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x)$$

όπου $(\lambda_n) \in c_0$

οπότε η

$\sum^{\infty} \lambda_n P_n$ συγκλίνει

ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Υπόθεση:

$$\forall x, \quad \underline{x = \sum P_n x} \quad (2)$$

και

$$A = \sum \lambda_n P_n \quad (1)$$

έτσι

$$Ax = \sum \lambda_n P_n x$$

νδο $AA^* = A^*A$

Έχουμε $AP_n = P_n A = \lambda_n P_n$

οπότε:

$$P_n A^* = A^* P_n = \bar{\lambda}_n P_n$$

άρα

$$A^*A = A^*\left(\sum \lambda_n P_n\right) = \sum \lambda_n A^* P_n = \sum \lambda_n \bar{\lambda}_n P_n$$

και

$$AA^* = \left(\sum \lambda_n P_n\right)A^* = \sum \lambda_n \bar{\lambda}_n P_n \quad !$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Έχει αποδειχθεί πριν.

Πόρισμα 1 $A \in \mathcal{K}(H)$, κανονικός

$$\|A\| = \max\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

Έστω (λ_n) μία αρίθμηση των $\sigma_p(A)$

Απόδ. Από Φασμ. Θεώρ.

$$A\big|_{(\ker A)^\perp} = U D_{(\lambda_n)} U^* \quad \left(\begin{matrix}\text{όπου } U \\ \text{unitary}\end{matrix}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\|A\| = \left\|A\big|_{(\ker A)^\perp}\right\| = \|D_{(\lambda_n)}\|$$

$$= \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

όμως $(\lambda_n) \in c_0$ οπότε $\exists \max|\lambda_n|$

Πόρισμα 2 $\|A\| = \overset{\max}{\cancel{\sup}}\{ |\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$

Απόδ.

Επειδή: $|\langle Ax, x\rangle| \le \|A\| \|x\|^2 = \|A\|$

όμως

$\exists \lambda \in \sigma_p(A) : \|A\| = |\lambda|$

οπότε αν $x \in M_\lambda$, $\|x\| = 1$

θα έχω

$$|\langle Ax, x\rangle| = |\langle \lambda x, x\rangle|$$

$$= |\lambda| \|x\|^2 = \|A\|$$

∎

Γενική μορφή συμπαγή $A: H \longrightarrow K$

Θέλω: $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n^*$

όπου $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ δύο ορθοκανονικά
νιά

και $\lambda_n > 0$ $\forall n$
$(\lambda_n) \in c_0$

<u>Απόδ</u> Θεωρώ τον τελεστή $T = A^*A \in B(H)$
ο οποίος είναι συμπαγής, θετικός

Από φασμ. θεώρ. $\exists\, (a(n))$, $a_n \in \mathbb{C}$
και μια ορθ. βάση (y_n) του $(\ker T)^\perp$

ώστε $\left\| T - \sum_{n=1}^{N} a(n)\, y_n y_n^* \right\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

$0 \le \langle T y_n, y_n \rangle = a_n$
άρα $a_n \geq 0$
επιπλέον $a_n \neq 0$
γιατί $y_n \perp \ker T$
οπότε μπορώ να ορίσω
$\lambda_n = \sqrt{a_n}$
και
$$x_n = \frac{A y_n}{\lambda_n} \in K$$

<u>Ισχ.</u> $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική

$$\langle x_k, x_n \rangle = \frac{1}{\lambda_k \lambda_n} \langle A y_k, A y_n \rangle$$

$$\langle x_k, x_n\rangle = \frac{1}{\lambda_k \lambda_n}\langle A^*A y_k, y_n\rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda_k\lambda_n}\, a_k \underbrace{\langle y_k, y_n\rangle}_{\delta_{kn}}$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2}\lambda_k^2\, \delta_{kn} = \delta_{kn}$$

<u>Ισχυρισμός</u> $B := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n^*$ είναι ο A

Έχω ήδη δείξει ότι η σειρά συγκλίνει στη $\| \ \|_{B(H,K)}$
(διότι η $(\lambda_n) \in c_0$)

Μένει να δω

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n^*(x) = A(x) \quad \forall x \in H$$

Παρατήρηση: παρατηρώ ότι $B|_{\ker T} = 0$

διότι αν $x \in \ker T$ τότε

$$Bx = \sum \lambda_n \langle x, y_n\rangle x_n = 0$$

διότι $y_n \perp \ker T$

Όμως, και ο $A|_{\ker T} = 0$ διότι:

$$\ker T = \ker A^*A = \ker A$$

(Απόδ: αν $A^*Ax = 0$ τότε $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0$, αντίστροφο προφανές)

Τέλος, $\forall x \in (\ker T)^{\perp}$ ισχύει ότι $Bx = Ax$
διότι αν πάρω $x = y_m$

τότε $$By_m = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y_m, y_n\rangle x_n = \lambda_m x_m$$

$$= \lambda_m \frac{A y_m}{\lambda_m} = A y_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

οπότε

$$Bx = Ax \quad \forall x \in \overline{\operatorname{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = (\ker T)^{\perp}$$

$\blacksquare$

Παρ: έχω: $T = \sum a_n y_n y_n^*$

να ορίσω $|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n y_n^*$

$\sim \operatorname{diag}(\sqrt{a_n})$

$|A| y_n = \lambda_n y_n : H \to H$

$A y_n = z_n \in K$

$x_n = \dfrac{z_n}{\lambda_n}$

$A: y_n \xrightarrow{|A|} \lambda_n y_n \xrightarrow{V} \lambda_n x_n$

ο V είναι ισομετρία

από τον $\overline{\operatorname{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$

στον $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$

$V : \underset{\text{ον}}{y_n} \longrightarrow \underset{\text{ον}}{x_n}$ "μερική ισομετρία"

Έγραψα: $A = V|A|$ $\sim$ $z = e^{i\theta}(?)$

V: μερ. ισομετρία

$|A|$: θετικός

πολική αναπαράσταση