11/12

Προς το Φασματικό Θεώρημα.

- **Λήμμα 1** $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τότε

$$Ax = \lambda x \Longrightarrow A^* x = \bar{\lambda} x$$

Απόδ. $Ax = \lambda x \iff \|(A - \lambda I)x\| = 0$

όμως $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda} I$

άρα ο $A - \lambda I$ φυσιολογικός

οπότε

$\iff \|(A - \lambda I)^* x\| = 0$

$\iff A^* x = \bar{\lambda} x$ ■

- **Λήμμα 2** $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός και $\lambda \neq \mu$ τότε $M_\lambda \perp M_\mu$ και $A(M_\lambda^\perp) \subseteq M_\lambda^\perp$

$(M_\lambda = \ker(A - \lambda I))$

Απόδ. (α) Αν $x \in M_\lambda$, $y \in M_\mu$ τότε

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

$$= \langle x, A^* y \rangle \overset{Λ1}{=} \langle x, \bar{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

αφού $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$

(β) Αν $z \in M_\lambda^\perp$ δείξω $Az \in M_\lambda^\perp$

οπότε παίρνω $x \in M_\lambda$ νδο $\langle Az, x \rangle = 0$

όμως $\langle Az, x \rangle = \langle z, A^* x \rangle$ $\quad x \in M_\lambda$

$= \langle z, \bar{\lambda} x \rangle$ $\quad A^* x \overset{Λ1}{=} \bar{\lambda} x$

$= 0$ διότι $z \perp \bar{\lambda} x$ ■

Θεώρημα $A\in B(H)$ φυσιολ., $\dim H<\infty$

νδο διαγωνοποιείται

ή ισοδύναμα: οι ιδιόχωροι $\{M_\lambda : \lambda\in\sigma_p(A)\}$ είναι $\perp$ ανά δύο και παράγουν τον H

Απόδ Ξέρω (Λ2) ότι είναι $\perp$ ανά δύο [illegible]

$$H_0=\mathrm{span}\{M_\lambda : \lambda\in\sigma_p(A)\}$$

νδο $H_0=H$

αν όχι τότε θεωρώ τον $H_0^\perp$

Παρατ. ότι $\forall\lambda\in\sigma_p(A)$, έχω $A(M_\lambda)\subseteq M_\lambda$ και $A^*(M_\lambda)\subseteq M_\lambda$ (Λ.2)

άρα $A(H_0)\subseteq H_0$ και $A^*(H_0)\subseteq H_0$

οπότε $A(H_0^\perp)\subseteq H_0^\perp$

Θέτοντας $B=A\big|_{H_0^\perp}$ έχω $B\in B(H_0^\perp)$

οπότε (αφού $\dim H_0<\infty$) ο B έχει μια ιδιοτιμή μ

και το $p(\lambda)=\det(B-\lambda I_H)$ είναι πολυώνυμο μιγαδικό.

$\dim H<\infty$

Άρα, $\exists\,\mu\in\mathbb{C}$ και $x\neq 0$ ώστε $Bx=\mu x$

$\Rightarrow$ $Ax=\mu x$: $x\in M_\mu(A)$

όμως $x\perp M_\lambda(A)$ $\forall\lambda\in\sigma_p(A)$, άτοπο. ∎

Παρατ. Αν $\dim H = \infty$, $A \in B(H)$ αυτοσ. δεν έχει κατ' ανάγκη ιδιοτιμές

Παράδ. $A : L^2 \to L^2$

$$(Af)(t) = t f(t)$$

Θα δείξω όμως ότι όταν A είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής, τότε έχει ιδιοτιμές

Πρτ. $A \in \mathcal{K}(H)$ και αυτοσυζυγής, $\forall \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή.

Απόδ. Αφού A αυτοσυζυγής ισχύει ότι $\lambda \in \sigma_a(A)$ δηλαδή $\exists (x_n)$ στο H, $\|x_n\| = 1$ $\forall n$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$

τώρα: (x_n) φραγμ., A συμπ. $\Rightarrow$ (Ax_n) έχει υπακ. (Ax_{k_n}) να συγκλίνει έστω στο w

Θα δω w είναι ιδιοδιάνυσμα για το λ $\longrightarrow$

(Ax_n) έχει υπακ. Az_n να συγκλίνει

δηλ. $w = \lim Az_n$ $\quad$ (διότι $\|(A-\lambda I)z_n\| \to 0$)

οπότε

$\lim(Az_n - w) \overset{(1)}{=} 0$ όμως $\lim(Az_n - \lambda z_n) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\|w - \lambda z_n\| \leq \|w - Az_n\| + \|Az_n - \lambda z_n\| \to 0$$

οπότε

$$w = \lim \lambda z_n \Rightarrow \underline{Aw} = \lim(\lambda A z_n) = \lambda \lim(Az_n) \overset{(1)}{=} \underline{\lambda w}$$

και τέλος:

$$\|w\| = \lim\|\lambda z_n\| = |\lambda| \lim\|z_n\| = |\lambda| \neq 0$$

∎

<u>Πχ</u> Ότι $\dim H = \infty$ και $A \in \mathcal{K}(H)$, τότε $0 \in \sigma(A)$

[Δεν μπορεί να $\exists A^{-1}$ γιατί τότε $A^{-1}A \in \mathcal{K}(H)$ οπότε $I \in \mathcal{K}(H)$] Αλλά ο 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή <u>πχ</u> $A = D_a$ όπου $a = \left(\frac{1}{n}\right)$

$$\underline{Ae_n = \frac{1}{n} e_n}$$

ο A είναι 1-1 (άρα)

<u>Πρ.</u> $A \in \mathcal{K}(H)$, $A = A^*$ τότε $\exists \lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$

<u>Απόδ.</u> Ότι $A = A^*$ έχουμε δείξει ότι $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$

$(A \neq 0)$ και αυτή $= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}\}$

Πρόταση Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $\lambda \neq 0$ ιδιοτιμή τότε $\dim M_\lambda(A) < +\infty$

Απόδειξη Είναι $A|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$

άρα ($\lambda \neq 0$) I_{M_λ} είναι συμπαγής

$\Longrightarrow$ δεν μπορεί ο M_λ να είναι απειροδιάστατος

διότι αν $\{e_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία θα έπρεπε $\{I(e_n)\} = \{e_n\}$ να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ αν $n \neq m$

Πρόταση $A \in \mathcal{K}(H)$, $\{x_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία και $\lambda_n \neq 0$: $Ax_n = \lambda_n x_n$

Τότε $\lambda_n \longrightarrow 0$

Απόδειξη $\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\langle Ax_n, x_n \rangle} = \langle \lambda_n x_n, x_n \rangle = \lambda_n$

A συμπ.

άρα $\lambda_n \longrightarrow 0$ ∎

<u>Πρότ.</u> $A \in \mathcal{B}(H)$ και φυσιολογικό

τότε $\sigma_p(A)$ είναι ή πεπερασμένο

ή απαρτίζει μηδενική ακολουθία

<u>Απόδ.</u> Αλλιώς $\exists\, \delta>0$ και άπειρα $\lambda_n \in \sigma_p(A)$, διαφορετικά ανά 2, με $|\lambda_n| \geq \delta \ \forall n$

$\exists\, x_n$ με $\|x_n\| = 1$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$

$x_n \in M_{\lambda_n}$

Όμως οι ιδιόχωροι του A είναι $\perp$ ανά δύο (<u>διότι</u> A φυσιολ.)

οπότε $x_n \perp x_m$ με $n \neq m$

άρα (x_n) είναι ορθ. ακολουθία

άρα

$|\langle Ax_n, x_n\rangle| = |\lambda_n| \geq \delta \ \forall n$

άτοπο διότι A συμπαγής.

Θεώρημα $A \in \mathcal{K}(H)$ φυσιολογικός

τότε $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι κάθετα ανά 2 και παράγουν τον H

(δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που τους περιέχει όλους είναι ο H).

Πρτρ Έπεται τότε ότι ο A διαγωνοποιείται στον $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ διότι $\forall \lambda \in \sigma_p(A)\setminus\{0\}$ ο M_λ έχει πεπερασμ. διάσταση. Πάρε μια ορθ. βάση

$$B_\lambda = \{e_i^\lambda : i=1..n_\lambda\} \text{ του } M_\lambda$$

$$Ae_i^\lambda = \lambda e_i^\lambda, \quad i=1..n_\lambda$$

και θεωρούμε

$$B = \bigcup_{\underbrace{\lambda \in \sigma_p(A)\setminus\{0\}}_{\text{αριθμήσιμο}}} B_\lambda = \text{αριθμήσιμο ορθ. σύνολο}$$

που είναι ο.κ. βάση του

$$H_0 := \overline{\operatorname{span}\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\setminus\{0\}\}}$$

όμως:

$$H_0 \oplus M_0 = H_0 \oplus \operatorname{Ker} A$$

και από το θεώρημα, $= H$.

Οπότε η B διαγωνοποιεί τον A στον

$$H_0 = (\operatorname{Ker} A)^\perp$$

Απόδ. Θεωρ.: Το σύνολο $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ αποτελείται από $\perp$ ανά δύο υπόχωρους

οπότε μένει να δω ότι το άθροισμά τους είναι $= H$

Ειδική περίπτωση $A = A^*$. Τότε, έχω δείξει ότι $\exists\, \lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$

ορίζω $H_1 = \overline{\mathrm{span}\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}}$

και θέλω να δω $H_1 = H$.

Θεωρώ τον $H_1^\perp$ και παρατηρώ ότι, αφού $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ $\forall \lambda$ θα είναι $A(H_1) \subseteq H_1$ (γιατί)

Αλλά $A = A^*$, οπότε έχω επίσης $A(H_1^\perp) \subseteq H_1^\perp$.

ορίζω $B = A|_{H_1^\perp} : H_1^\perp \longrightarrow H_1^\perp$

συμπαγής (γιατί;)

και αυτοσυζυγής διότι

$\forall x \in H_1^\perp$, $\langle Bx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle A^*x, x\rangle \in \mathbb{R}$

Έχω αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή σε $H_1^\perp$

και αν $H_1^\perp \neq \{0\}$ τότε ο B θα είχε μια ιδιοτιμή, άτοπο διότι $\forall\, M_\lambda \subseteq H_1$

άρα $H_1^\perp = \{0\}$ ∎

Γενική περίπτωση: $A \in \mathcal{K}(H)$ και φυσιολογικός

Γράφω $A = B + iC$ $\quad B = \dfrac{A+A^*}{2}, \; C = \dfrac{A-A^*}{2i}$

B, C αυτοσυζυγείς και συμπαγείς

όμως επιπλέον $BC = CB$

διότι $(A+A^*)(A-A^*) = (A-A^*)(A+A^*)$.

αφού $AA^* = A^*A$.

Οπότε κάθε ιδιόχωρος $M_\lambda(B)$ του B

είναι C-αναλλοίωτος!!

[Απόδ: $x \in M_\lambda(B)$ δηλ. $Bx - \lambda x = 0$

τότε $B(Cx) - \lambda(Cx)$
$= C(Bx - \lambda x) = 0$ άρα $Cx \in M_\lambda$]

Περιορίζομαι στο $(\ker A)^\perp$ (που είναι B-αναλλ.

και C-αναλλ. διότι ο $\ker A$ είναι A-αναλλ

και A^*-αναλλ έχουμε $AA^* = A^*A$.)

Μπορώ λοιπόν να υποθέσω ότι ο H είναι διαχωρίσιμος

Έχω $B = B^* \in \mathcal{K}(H)$. Από την ειδική περίπτωση

ξέρω $\{M_\lambda(B) : \lambda \in \sigma_p(B)\}$ είναι $\perp$ ανά 2

και παράγουν τον H.

Τώρα, $\forall \lambda \in \sigma_p(B)$ ξέρω ότι $C(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

(διότι $CB = BC$) οπότε $C(M_\lambda^\perp) \subseteq M_\lambda^\perp$

(διότι $C = C^*$), άρα ο $C_\lambda := C|_{M_\lambda} : M_\lambda \to M_\lambda$

είναι συμπαγής και

αυτοσυζυγής άρα ο C_λ διαγωνοποιείται

στον M_λ

$\exists \; B_\lambda = \{e_n^\lambda : n \in \mathbb{N}$ ή πεπ.$\}$ ο.κ. βάση

για $M_\lambda(B)$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα

του C_λ

Βεβαίως: $B e_n^\lambda = \lambda e_n^\lambda \quad \forall n$

άρα η B_λ διαγωνοποιεί ταυτόχρονα

και τον B και τον C.

άρα τον $A = B + iC$ στον M_λ.

Ο τελικά $\mathcal{B} = \bigcup_{j \in \sigma_p(B)} \mathcal{B}_j$ είναι αριθμήσιμη ορθοκανονική οικογένεια

και είναι ο.κ. βάση του $\overline{\mathrm{span}\{M_j : j \in \sigma_p(B)\}} \overset{(*)}{=} H$

η οποία $\mathcal{B}$ διαγωνοποιεί τον B και τον C

(από την ειδική περίπτωση $B = B^*$) $\blacksquare$

<u>Λήμμα</u> Αν B, C φυσιολογικοί και συμπαγείς και $BC = CB$ σε διαχ. χώρο H τότε $\exists$ ορθ. βάση του H που διαγωνοποιεί ταυτόχρονα και τους δύο

<u>Απόδ.</u> Ίδιο επιχείρημα