

Μια σημείωση για τις προβολές σε χώρους Hilbert

Αν M είναι¹ κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , έχουμε δείξει (θεώρημα 1.5.6) ότι $H = M \oplus M^\perp$, δηλαδή κάθε $x \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = x_M + x_N$ όπου $x_M \in M$ και $x_N \in M^\perp$. Έπεται ότι η (καλά ορισμένη) απεικόνιση $P_M : H \rightarrow H : x \rightarrow x_M$ είναι γραμμική, και λέγεται η **(ορθή) προβολή επί του M** . Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι $\|x_M\| \leq \|x\|$, οπότε η P_M είναι συνεχής, μάλιστα $\|P_M\| = 1$, αν $M \neq \{0\}$. Από την σχέση $(I - P_M)x = x_N$ φαίνεται ότι η $I - P_M$ είναι η (ορθή) προβολή επί του M^\perp , άρα $\|I - P_M\| \leq 1$.

Επίσης, το x_M είναι το πλησιέστερο προς το x σημείο του M . Πράγματι, κάθε σημείο $y \in M$ ικανοποιεί $(I - P_M)y = 0$, οπότε $\|x - P_M x\| = \|(I - P_M)(x - y)\| \leq \|x - y\|$. Πράγματι λοιπόν η P_M είναι η απεικόνιση που ορίσθηκε με την Πρόταση 1.5.1.

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι το σύνολο τιμών $\text{im } P_M$ της P_M είναι ο M και ότι ο πυρήνας $\ker P_M$ είναι ο M^\perp .²

Πρόταση 1 Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \rightarrow H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλαδή $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.
- (β) $(\ker P) \perp (\text{im } P)$.
- (γ) $\|P\| \leq 1$.

Απόδειξη (α) \Rightarrow (β) Προφανές, αφού $\text{im } P_M = M$ και $\ker P_M = M^\perp$.

(β) \Rightarrow (γ) Κάθε $x \in H$ γράφεται $x = Px + (I - P)x$. Όμως $Px \in \text{im } P$ και $(I - P)x \in \ker P$ (γιατί $P(I - P)x = Px - P^2x = 0$), συνεπώς είναι κάθετα από την υπόθεση. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε λοιπόν

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 \geq \|Px\|^2$$

δηλαδή $\|Px\| \leq \|x\|$, πράγμα που σημαίνει ότι $\|P\| \leq 1$.

(γ) \Rightarrow (α) Θέτω $M = \text{im } P$ και ισχυρίζομαι ότι $P = P_M$. Πρέπει λοιπόν να δείξω ότι $(\ker P)^\perp = M$. Έστω $x \in (\ker P)^\perp$. Επειδή $(I - P)x \in \ker P$, έχουμε $x \perp (I - P)x$. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$\|x\|^2 + \|(I - P)x\|^2 = \|x - (I - P)x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$$

αφού $\|P\| \leq 1$. Δείξαμε ότι $(I - P)x = 0$, άρα $x = Px \in M$. Επομένως $(\ker P)^\perp \subseteq M$.

Αν $(\ker P)^\perp \subsetneq M$, υπάρχει μη μηδενικό $y \in M$ κάθετο στον $(\ker P)^\perp$. Δηλαδή $y \in (\ker P)^{\perp\perp} = \ker P$ (ο $\ker P$ είναι κλειστός υπόχωρος, αφού P συνεχής). Έχουμε λοιπόν $y \in \ker P \cap \text{im } P = \{0\}$ ενώ υποθέσαμε ότι $y \neq 0$. Άρα λοιπόν $(\ker P)^\perp = M$.

Η επόμενη Πρόταση χαρακτηρίζει τις προβολές σε έναν χώρο Hilbert σε σχέση με τις διάφορες κατηγορίες τελεστών που έχουμε ορίσει. Ο χαρακτηρισμός που χρησιμοποιείται πιο συχνά προκύπτει από την (α) \iff (ε):

¹probnewn 11 Νοεμβρίου 2017

²Κάθε $Px = x_M$ ανήκει στον M , άρα $\text{im } P_M \subseteq M$, και αν $x \in M$ τότε $x_M = x$ δηλαδή $x = P(x)$, άρα $M \subseteq \text{im } P_M$. Επίσης, αν $x \in M^\perp$ τότε $x = x_N$ άρα $Px = 0$ και αν $Px = 0$ τότε $x = x_N \in M^\perp$.

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

Πρόταση 2 Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\text{im } P$.
- (β) Ο P είναι θετικός.
- (γ) Ο P είναι αυτοσυζυγής.
- (δ) Ο P είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη (α) \Rightarrow (β) Αν $z \in H$, έχουμε $(I - P)z \in \ker P$ και $Pz \in \text{im } P$, άρα $\langle Pz, (I - P)z \rangle = 0$, δηλαδή $\langle Pz, z \rangle = \langle Pz, Pz \rangle$, επομένως $\langle Pz, z \rangle \geq 0$. Αφού το z είναι τυχαίο, δείξαμε ότι $P \geq 0$.

Οι συνεπαγωγές (β) \Rightarrow (γ) \Rightarrow (δ) είναι προφανείς: κάθε θετικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής και κάθε αυτοσυζυγής είναι φυσιολογικός.

Μένει να δειχθεί η (δ) \Rightarrow (α):

Αν ο P είναι φυσιολογικός, τότε για κάθε $x \in H$ ισχύει $\|Px\| = \|P^*x\|$ (Πρόταση 2.4.5). Άρα $\ker P = \ker(P^*)$. Αν λοιπόν $x \in \ker P$ και $y = Pz \in \text{im } P$, τότε

$$\langle x, y \rangle = \langle x, Pz \rangle = \langle P^*x, z \rangle = 0.$$

Επομένως $(\ker P) \perp (\text{im } P)$. Από την προηγούμενη πρόταση, αυτό δείχνει ότι η P είναι η ορθή προβολή επί του $\text{im } P$. \square

Παρατήρηση 3 Η απεικόνιση $M \rightarrow P_M = P(M)$ είναι λοιπόν μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert και του συνόλου

$$\mathcal{P}(H) = \{P \in \mathcal{B}(H) : P^2 = P^* = P\}$$

των (ορθών) προβολών, με αντίστροφη την $P \rightarrow \text{im } P$. Είναι φανερό ότι

$$P(\{0\}) = 0, P(H) = I \text{ και } P(M^\perp) = I - P(M).$$

Παρατήρηση 4 Αξίζει να απομονώσουμε δυο χρήσιμες ιδιότητες κάθε ορθής προβολής P :

- (α) Για κάθε $x \in H$ ισχύει η $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$.
- (β) Αν $\|Py\| = \|y\|$ τότε $Py = y$.

Πράγματι, για το (α) έχουμε $\langle Px, x \rangle = \langle PPx, x \rangle = \langle Px, P^*x \rangle = \langle Px, Px \rangle$.

Για το (β), αφού τα Py και $(I - P)y$ είναι κάθετα, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\|y\|^2 = \|Py\|^2 + \|(I - P)y\|^2.$$

άρα, η υπόθεση $\|Py\|^2 = \|y\|^2$ δίνει $\|(I - P)y\|^2 = 0$ άρα $(I - P)y = 0$ δηλαδή $Py = y$.