Άσκηση: Οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι συμπαγείς

Ο στόχος της άσκησης είναι να δείξουμε ότι κάθε ολοκληρωτικός τελεστής T_k με (συνεχή) πυρήνα $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συμπαγής.

Έστω $H = L^2([0,1])$ και $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, δηλ. $k \in C([0,1]^2)$. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό

$$(T_k f)(s) = \int k(s,t) f(t) dt, \quad f \in H.$$

Η ιδέα της απόδειξης είναι να παρατηρήσουμε ότι ένας ολοκληρωτικός τελεστής που ο πυρήνας του είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός *ορθογωνίου* ορίζει τελεστή *πρώτης τάξης*, και να προσεγγίσουμε τον T_k ως προς τη νόρμα τελεστή από ολοκληρωτικούς τελεστές με τέτοιους πυρήνες.

Λήμμα. Αν $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων $R_{1,1}, \dots R_{n,n}$ μέσα στο $[0,1] \times [0,1]$ και $a_{1,1}, \dots a_{n,n} \in \mathbb{C}$ ώστε [1]

$$\text{αν} \quad k_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \chi_{R_{i,j}} \qquad \text{τότε} \quad \|k - k_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon\,.$$

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της k, για το δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν (x,y) και (s,t) είναι σημεία του $[0,1] \times [0,1]$ που ικανοποιούν $\max\{|x-s|, |y-t|\} < \delta$, τότε $|k(x,y) - k(s,t)| < \varepsilon$.

Ας διαμερίσουμε τώρα το $[0,1] \times [0,1]$ σε πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων με πλευρές μήκους μικρότερου από δ: για παράδειγμα, ας διαλέξουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$, και ας θέσουμε $R_{i,j} = I_i \times I_j$, όπου $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$ όταν $i = 1, \dots, n-1$ και $I_n = [\frac{n-1}{n}, 1]$.

Κάθε $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ ανήκει σε ακριβώς ένα ορθογώνιο R_{i_s, j_s}, οπότε $|k(s,t) - k(\frac{i_s - 1}{n}, \frac{j_s - 1}{n})| < \varepsilon$. Επομένως αν ορίσουμε $a_{i,j} = k(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n})$ και

$$k_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \chi_{R_{i,j}}$$

τότε

$$|k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)| = |k(s,t) - a_{i_s, j_s}| < \varepsilon\,.$$

Έπεται ότι

$$\sup\{|k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)| : (s,t) \in [0,1] \times [0,1]\} \leqslant \varepsilon\,. \qquad \square$$

Παρατήρησε ότι, αν ονομάσουμε χ_i τη χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος I_i, τότε $\chi_{R_{i,j}}(s,t) = \chi_i(s) \chi_j(t)$. Η γραμμική μορφή [2]

$$\chi_j^* : f \to \int \chi_j(t) f(t) dt = \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(t) dt = \langle f, \chi_j \rangle$$

[1] Έτσι δεν δείχνουμε στον Απειρ. ΙΙΙ ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0,1] \times [0,1]$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη;

[2] παρατήρησε ότι $\chi_j \in H$ (γιατί;)

είναι συνεχής στον H (ανισότητα Cauchy - Schwarz). Συνεπώς ο τύπος

$$T_\varepsilon f := \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\chi_j^*(f)\chi_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(\chi_i \otimes \chi_j^*)(f)$$

ορίζει (φραγμένο) τελεστή T_ε πεπερασμένης τάξης στον H. Αν $f \in C([0,1])$, για κάθε $s \in [0,1]$ η συνάρτηση $t \to k_\varepsilon(s,t)f(t)$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και

$$\int k_\varepsilon(s,t)f(t)dt = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\chi_i(s)\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(t)dt = (T_\varepsilon f)(s).$$

Εφόσον $|k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)| \leqslant \varepsilon$ για κάθε (s,t), έχουμε

$$\begin{aligned}|(T_k f)(s) - (T_\varepsilon f)(s)|^2 &= \left|\int (k(s,t) - k_\varepsilon(s,t))f(t)dt\right|^2 \leqslant \left(\int |k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)||f(t)|dt\right)^2 \\ &\overset{(cs)}{\leqslant} \int |k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)|^2 dt \int |f(t)|^2 dt \leqslant \varepsilon^2 \|f\|_2^2\end{aligned}$$

για κάθε $s \in [0,1]$, όπου στην (cs) χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz. Έπεται ότι

$$\|T_k f - T_\varepsilon f\|_2^2 = \int_0^1 |(T_k f)(s) - (T_\varepsilon f)(s)|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|f\|_2^2$$

για κάθε $f \in C([0,1])$. Επομένως

$$\|T_k - T_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon.$$

Αφού ο T_ε έχει πεπερασμένη τάξη για κάθε ε, δείξαμε ότι ο T_k προσεγγίζεται *ως προς τη νόρμα τελεστή* από τελεστές πεπερασμένης τάξης, και άρα είναι συμπαγής.