Επέκταση φραγμένου τελεστή στην πλήρωση

Στην πράξη, πολλές φορές μια γραμμική απεικόνιση T είναι κατ' αρχήν ορισμένη μεταξύ δύο χώρων με νόρμα που δεν είναι πλήρεις, και ενδιαφερόμαστε να την επεκτείνουμε σε μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των πληρώσεων των δύο χώρων. Η επόμενη Πρόταση καθορίζει πότε μια τέτοια επέκταση είναι δυνατή. Σημειώνουμε ότι, επειδή κάθε χώρος με νόρμα εμφυτεύεται ισομετρικά (δηλαδή, "με την ίδια νόρμα") σε έναν χώρο Banach (την πλήρωσή του), μπορούμε εξ αρχής να υποθέσουμε ότι η T παίρνει τιμές μέσα σε έναν χώρο Banach.

Πρόταση 1. *Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F, \|\cdot\|_F)$ χώρος Banach, D πυκνός υπόχωρος του E και $T : D \to F$ γραμμική απεικόνιση. Η T είναι συνεχής αν και μόνον αν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{T} : E \to F$ της T στον E. Η επέκταση $\tilde{T}$ είναι μοναδική (αν υπάρχει) και $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{T}$ της T στον E τότε, για κάθε $x \in E$, επιλέγοντας μια ακολουθία (x_n) του D με $x_n \to x$ θα έχουμε, λόγω συνέχειας της $\tilde{T}$, ότι $\tilde{T}(x) = \lim_n \tilde{T}x_n = \lim_n Tx_n$ αφού $\tilde{T}|_D = T$. Επομένως η συνεχής επέκταση, αν υπάρχει, είναι μοναδική, εφόσον ικανοποιεί

$$\tilde{T}(x) = \lim_n Tx_n \quad \text{για κάθε } x \in E \text{ και κάθε } (x_n) \text{ του } D \text{ με } x_n \to x.$$

Έστω τώρα ότι η T είναι συνεχής στο D. Θα την επεκτείνουμε κατά συνεχή τρόπο στο τυχόν $x \in E$. Επειδή ο D είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία (x_n) στον D με $x_n \to x$.

(1) Υπάρχει $y_x \in F$ ώστε $Tx_n \to y_x$.
Πράγματι, η ανισότητα

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\|.\|x_n - x_m\|$$

δείχνει ότι η ακολουθία (Tx_n) είναι βασική στον F, άρα, εφόσον ο F είναι πλήρης, συγκλίνει.

(2) Το y_x εξαρτάται μόνον από το x, και όχι από την (x_n).
Πράγματι, αν (z_n) είναι μια άλλη ακολουθία στον D που επίσης συγκλίνει στο x, τότε $\lim(x_n - z_n) = 0$, συνεπώς

$$\|Tx_n - Tz_n\| \leqslant \|T\|.\|x_n - z_n\| \to 0,$$

άρα $\lim_n Tx_n = \lim_n Tz_n$.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την $\tilde{T}$ σ' όλον τον E θέτοντας $\tilde{T}x = y_x$, δηλαδή

$$\tilde{T}(\lim x_n) := \lim Tx_n \,.$$

Είναι φανερό ότι $\tilde{T}|D = T$ (πράγματι, αν $x \in D$, θέτοντας $x_n = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\tilde{T}x = \lim Tx_n = Tx$).

Η γραμμικότητα της $\tilde{T}$ ελέγχεται άμεσα: αν $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στον D με $x_n \to x$ και $y_n \to y$, οπότε $Tx_n \to \tilde{T}x$ και $Ty_n \to \tilde{T}y$, άρα

$$\tilde{T}(x + \lambda y) = \lim_n T(x_n + \lambda y_n) = \lim_n Tx_n + \lambda \lim_n Ty_n = \tilde{T}x + \lambda \tilde{T}y.$$

Για να ελέγξουμε αν η $\tilde{T}$ είναι συνεχής (ισοδύναμα φραγμένη) παρατηρούμε ότι ο ορισμός της συνεπάγεται ότι, για κάθε $x \in E$ και $\{x_n\} \subseteq D$ με $x = \lim x_n$, ισχύει

$$\|\tilde{T}x\| = \lim \|Tx_n\| \leqslant \|T\|. \lim \|x_n\| = \|T\|.\|x\| \,.$$

Επομένως η $\tilde{T}$ είναι φραγμένη στον E και μάλιστα $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$.
Εφόσον όμως $\|\tilde{T}x\| = \|Tx\|$ όταν $x \in D$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in D, \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in D, \|x\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\} = \|\tilde{T}\| \end{aligned}$$

άρα $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Το αντίστροφο είναι βέβαια προφανές: ο περιορισμός T μιάς συνεχούς απεικόνισης είναι συνεχής. $\square$