Θεωρία Τελεστών - Πρόταση για Εργασία

Έστω E_1, E_2 $\mathbb{K}$-χώροι Hilbert. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{A}(E_1, E_2)$ όλων των *αντιδιγραμμικών απεικονίσεων* $\phi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{K}$ (δηλ. $E_1 \to \mathbb{K} : \xi \to \overline{\phi(\xi,\eta)}$ γραμμική για κάθε $\eta \in E_2$ και $E_2 \to \mathbb{K} : \eta \to \overline{\phi(\xi,\eta)}$ γραμμική για κάθε $\xi \in E_1$). Είναι $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος με πράξεις κατά σημείο.

Αν $x \in E_1$ και $y \in E_2$ ονομάζω $x \otimes y$ την απεικόνιση

$$x \otimes y : E_1 \times E_2 \to \mathbb{K} : (\xi, \eta) \to \langle x, \xi \rangle_1 \langle y, \eta \rangle_2 .$$

Ορισμός 1 (Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο)

$$E_1 \odot E_2 := \operatorname{span}\{x \otimes y : \xi \in E_1, \eta \in E_2\} \subseteq \mathcal{A}(E_1, E_2) .$$

Παρατήρηση $(x_1+x_2)\otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, $x \otimes (y_1+y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, $(\lambda x)\otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$.

Πρόταση 1 (Καθολική ιδιότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$) *Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει* μοναδική *γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.*

Έπεται ότι:

Πόρισμα 2 *Αν G γραμμ. χώρος και $\otimes' : E_1 \times E_2 \to G$ διγρ. απεικ. ώστε το $(G, \otimes')$ να έχει την καθολική ιδιότητα, τότε υπάρχει γραμμ. ισομορφισμός $T : E_1 \odot E_2 \to G$ ώστε $T(x \otimes y) = x \otimes' y$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.*

Παρατήρηση $E \odot \mathbb{K} \simeq E$, $E \odot \mathbb{K}^n \simeq E^n$.

Ορισμός 2 *Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Στον $H_1 \odot H_2$ θέτω*

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, y_1 \rangle_1 \cdot \langle x_2, y_2 \rangle_2 .$$

Πρόταση 3 *Ορίζει εσωτ. γινόμενο.*

Ορίζουμε

$$H_1 \otimes H_2 := \overline{(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})}.$$

Πρόταση 4 *Αν $\{e_i\}_I$ ο.κ. βάση του H_1 και $\{f_j\}_J$ ο.κ. βάση του H_2, ο $H_1 \otimes H_2$ έχει ο.κ. βάση $\{e_i \otimes f_j\}_{I \times J}$.*

Παρατήρηση Όταν $\dim H_1 < \infty$ και $\dim H_2 < \infty$, τότε $H_1 \odot H_2 = H_1 \otimes H_2$.

Παράδειγμα $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu) = L^2(\pi)$ όπου π μέτρο γινόμενο.

Παράδειγμα $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \odot \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{nk}$.