Άσκηση II.6

Δείξτε ότι η απεικόνιση $f \to f' : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to C_c^\infty(\mathbb{R})$ δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $D : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ώστε $Df = f'$ για κάθε $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$f_n(t) = \begin{cases} (1-t)t^n & : t \in [0,1] \\ 0 & : t \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{και} \quad h_n(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}(1-t)t^n & : t \in [0,1] \\ 0 & : t \notin [0,1] \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές ανήκουν στον $L^2(\mathbb{R})$. Ένας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(t)|^2 dt = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$

ενώ, όταν $t \in (0,1)$, $h_n(t) = \frac{d}{dt}(1-t)t^n = nt^{n-1} - (n+1)t^n \geq n(1-t)t^{n-1} \geq 0$, άρα

$$\|h_n\|_2^2 \geq \int_0^1 |n(1-t)t^{n-1})|^2 dt = n^2 \frac{2}{(2n-1)(2n)(2n+1)}$$

άρα

$$\left(\frac{\|h_n\|_2}{\|f_n\|_2}\right)^2 \geq n^2 \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{(2n-1)(2n)(2n+1)} \geq n^2 \,.$$

Επομένως, αν δείξω ότι $h_n = Df_n$ για κάθε n, από την προηγούμενη ανισότητα θα έχω ότι $\|D\| \geq \frac{\|Df_n\|_2}{\|f_n\|_2} \geq n$ για κάθε n, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο D είναι φραγμένος ($\|D\| < \infty$).

Θα αποδείξω λοιπόν την ισότητα $h_n = Df_n$ για κάθε n. Αρκεί γι αυτό να δείξω ότι

$$\langle Df_n, g\rangle = \langle h_n, g\rangle \tag{*}$$

για κάθε n και κάθε $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, αφού ο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση. Για κάθε $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ισχύει η σχέση:

$$\langle Df, g\rangle = -\langle f, Dg\rangle \,.$$

Πράγματι, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\langle Df, g\rangle = \int_{-\infty}^\infty f'(t)\overline{g(t)}dt = [f(t)\overline{g(t)}]_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^\infty f(t)\overline{g'(t)}dt = 0 - \langle f, Dg\rangle \tag{**}$$

διότι $[f(t)\overline{g(t)}]_{-\infty}^\infty = \lim_{M,N\to\infty}[f(t)\overline{g(t)}]_{-M}^N = 0$ εφόσον οι f και g μηδενίζονται έξω από κάποιο $[-K, K]$.

Αφού έχουμε υποθέσει ότι ο D είναι συνεχής και ο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$, η σχέση (**) αληθεύει για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Την εφαρμόζω για την f_n και έχω, για κάθε $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle Df_n, g\rangle = -\langle f_n, Dg\rangle &= -\int_0^1 (1-t)t^n\overline{g'(t)}dt \\ &= -[(1-t)t^n\overline{g(t)}]_0^1 + \int_0^1 ((1-t)t^n)'\overline{g(t)}dt = +\langle h_n, g\rangle\end{aligned}$$

(γιατί $f(0) = 0 = f(1)$) και η (*) αποδείχθηκε. □

Σχόλιο. Η ουσία της υπόθεσης βρίσκεται στην απλή παρατήρηση ότι, όταν παραγωγίζω την $y_n(t) = t^n$, εμφανίζεται ένας παράγοντας n που πολλαπλασιάζει την $\|\cdot\|_2$ της συνάρτησης, πράγμα που δείχνει ότι ο τελεστής της παραγώγισης δεν είναι φραγμένος. Το "τεχνικό" πρόβλημα στην απόδειξη για τον $L^2(\mathbb{R})$ (σε αντίθεση με τον $L^2([0,1])$), είναι ότι η συνάρτηση f_n δεν παραγωγίζεται στα σημεία 0 και 1, οπότε χρειάσθηκε να δείξω την ισότητα $h_n = Df_n$ "ασθενώς", δηλ. μέσω της $\langle Df_n, g\rangle = \langle h_n, g\rangle$ για κάθε $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ο όρος $(1-t)$ στην f_n μπήκε για να λειτουργήσει το "κόλπο" με την ολοκλήρωση κατά μέρη. Αν βέβαια μπορούσα να χρησιμοποιήσω Θεωρία Μέτρου, τίποτε από αυτά δεν θα χρειαζόταν, γιατί η f_n είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη.