Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις V

1. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους. Δείξτε επίσης ότι $|A| = A_+ + A_-$.

2. Έστω H χώρος Hilbert, $B \in \mathcal{K}(H)$. Αν $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A_n x - Ax\| \to 0$ για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\|A_n B - AB\| \to 0$. [*Σχόλιο: Δεν ισχύει εν γένει ότι* $\|BA_n - BA\| \to 0$.]

Αν $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών και $P = \vee P_n$ είναι η προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$, δείξτε ότι $\|BP_n - BP\| \to 0$ και $\|P_n B P_n - PBP\| \to 0$.

3. Αν ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, δείξτε ότι μπορούν να βρεθούν προβολές P_n πεπερασμένης τάξης ώστε $\vee P_n = I$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δώστε μια άλλη απόδειξη ότι κάθε συμπαγής τελεστής στον H προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης.

4. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{F}(H)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

5. Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δυο και παράγουν τον H.

6. Αν ένας τελεστής A γράφεται $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i^* = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i \otimes v_i^*$, όπου $(x_n), (y_n), (u_n)$ και (v_n) είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και $(\lambda_i), (\mu_i)$ είναι φθίνουσες μηδενικές ακολουθίες θετικών αριθμών, δείξτε ότι $(\lambda_n) = (\mu_n)$. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum\limits_n \lambda_n$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται *τελεστής ίχνους (trace class operator)* ή καμιά φορά *πυρηνικός τελεστής (nuclear operator)*.

7. Έστω H χώρος Hilbert, M και N υπόχωροι του H, με $\dim M = k$ και $\dim N^\perp = k - 1$. Δείξτε ότι $M \cap N \neq \{0\}$. [Υπόδειξη: Ένα γραμμικό σύστημα $k-1$ εξισώσεων με k αγνώστους έχει μη μηδενική λύση.]

8. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και M κλειστός υπόχωρος του H. Δείξτε ότι

$$\sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in M, \|x\| = 1\} = \max\{\langle Ax, x\rangle : x \in M, \|x\| = 1\}.$$

[Υπόδειξη. Εξετάστε τον συμπαγή αυτοσυζυγή τελεστή $PA|_M$, όπου P η προβολή στον M.]

9. (*Αρχή min-max του Courant*) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής θετικός τελεστής, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^\perp$ από ιδιοδιανύσματα του A. Υπάρχουν λοιπόν θετικοί αριθμοί $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διατάσσουμε την (λ_n) κατά φθίνουσα (μη αύξουσα) σειρά: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$.

Για κάθε υπόχωρο $V \subseteq H$, θέτουμε $\mu(V) := \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in V^\perp, \|x\| = 1\}$.

Ξέρουμε ότι $\|A\| = \max\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} = \mu(0)$.

Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = \min\{\mu(V) : \dim V = k-1\} = \min\{\max\{\langle Ax, x\rangle : x \in V^\perp, \|x\| = 1\} : \dim V = k-1\}.$$

[Υπόδειξη. Μπορεί να χρειασθούν οι δυο προηγούμενες ασκήσεις.]