Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV - υποδείξεις

7. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Αν S_A είναι η προβολή στον υπόχωρο $\overline{A(H)}$, τότε
(α) η $S_A^\perp := I - S_A$ είναι η προβολή στον $\ker A$
(β) $S_A A = A$
(γ) αν P είναι προβολή με $PA = A$, τότε $PS_A = S_A$
(δηλ. η S_A είναι η μικρότερη προβολή P που ικανοποιεί $PA = A$).

Υπόδ. (α) Αν $M := \overline{A(H)}$, ξέρουμε ότι η $I - S_A$ είναι η προβολή στον $M^\perp$. Όμως έχουμε δείξει ότι $M^\perp = \ker A^* = \ker A$.

(β) Για κάθε $x \in H$, έχουμε $Ax \in M$ άρα $S_A(Ax) = Ax$. Συνεπώς $S_A A = A$.

(γ) Για κάθε $x \in H$, έχουμε $PAx = Ax$ άρα για κάθε $y \in M = \overline{A(H)}$ έχουμε $Py = y$ λόγω συνέχειας της P. Όμως για κάθε $z \in H$ έχουμε $S_A z \in M$ άρα $PS_A z = S_A z$, δηλ. $PS_A = S_A$.

8. (α) Αν x_n είναι κάθετα ανά δύο διανύσματα ενός χώρου Hilbert H, τότε η σειρά $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\sum \|x_n\|^2 < \infty$.

(β) Αν H_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι του H, τότε ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_n είναι ο

$$\left\{ \sum_n x_n : x_n \in H_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

Υπόδ. (α) Γράφω $s_n = \sum\limits_{k=1}^n x_k$. Η (s_n) συγκλίνει ανν είναι βασική. Και η $\sum \|x_n\|^2$ συγκλίνει ανν τα μερικά αθροίσματα $\lambda_n := \sum\limits_{k=1}^n \|x_k\|^2$ αποτελούν βασική ακολουθία (στον $\mathbb{R}$).

Όμως, λόγω καθετότητας, αν $n > m$,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|^2 = \lambda_n - \lambda_m$$

άρα, η (s_n) είναι βασική ανν η (λ_n) είναι βασική.

(β) Ονομάζω K τον μικρότερο κλειστό υπόχωρο του H που περιέχει κάθε H_n. Αν $x_n \in H_n$ για κάθε n και $\sum \|x_n\|^2 < \infty$, τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum\limits_{k=1}^n x_k$ ανήκουν προφανώς όλα στον K. Κι αφού η σειρά συγκλίνει από το (α) και ο K είναι κλειστός, το όριό της ανήκει στον K.

Μένει να δείξουμε ότι κάθε $x \in K$ γράφεται ως □κά αθροίσιμη ($\iff$ συγκλίνουσα) σειρά $x = \sum_n x_n$ όπου κάθε $x_n \in H_n$. Γι αυτό ορίζουμε $x_n = P_n x$ (όπου P_n η προβολή πάνω στον H_n) και πρέπει να δείξουμε ότι η $\sum P_n x$ συγκλίνει, κι ότι συγκλίνει στο x. (Στην πραγματικότητα το έχουμε δείξει, με την Πρόταση 2.5.12)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού οι H_n είναι κάθετοι ανά δύο, το μερικό άθροισμα $\sum\limits_{k=1}^n P_k x$ ισούται με την προβολή του x στον υπόχωρο $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ (Προτ. 2.5.7). Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \overset{(Pyth)}{=} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 \leq \|x\|^2,$$

άρα $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|^2 < \infty$. Από το (α), αυτό δείχνει ότι η σειρά $s := \sum P_n x$ συγκλίνει.
Δείχνουμε ότι $s = x$: Παρατηρούμε ότι $P_m s = \sum_n P_m P_n s = P_m x$ λόγω καθετότητας των $\{P_n\}$, δηλαδή $P_m(s - x) = 0$, ισοδύναμα $s - x \perp H_m$ για κάθε m, και άρα το $s - x$ είναι κάθετο στον μικρότερο κλειστό υπόχωρο του H που περιέχει κάθε H_m, δηλαδή στον K. Από την άλλη μεριά όμως το $s - x$ ανήκει στον K, άρα $s - x = 0$, δηλαδή $\sum P_n x = x$, όπως θέλαμε.

9. (α) Να δειχθεί ότι ο μόνος πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f στον $L^2([0,1])$ που έχει πεπερασμένη τάξη είναι ο 0.

(β) Μπορεί ο M_f να είναι συμπαγής;

Υπόδ. Ισχυρίζομαι ότι αν ο M_f είναι συμπαγής, τότε είναι 0. Αυτό απαντά και στα δύο σκέλη της άσκησης.

Αν $f \neq 0$, υπάρχει ένα μη τετριμένο διάστημα $J \subseteq [0,1]$ κι ένα $\delta > 0$ ώστε $|f(t)| \geq \delta$ για κάθε $t \in J$. Όμως ο υπόχωρος K του $L^2([0,1])$ που αποτελείται απ' όλες τις συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω απ' το J είναι απειροδιάστατος, οπότε περιέχει μια άπειρη ορθοκανονική ακολουθία (h_n). Για κάθε $n \neq m$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|M_f h_n - M_f h_m\|^2 &= \int_0^1 |f(t)h_n(t) - f(t)h_m(t)|^2 dt = \int_J |f(t)|^2 |h_n(t) - h_m(t)|^2 dt \\ &\geq \delta^2 \int_J |h_n(t) - h_m(t)|^2 dt = \delta^2 \int_0^1 |h_n(t) - h_m(t)|^2 dt = \delta^2(\|h_n\|^2 + \|h_m\|^2) = 2\delta^2 .\end{aligned}$$

Επομένως η ακολουθία $(M_f h_n)$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα ο M_f δεν είναι συμπαγής.

Άλλη υποδ. Αν ο M_f είναι συμπαγής, τότε και ο $M_f^* M_f$, δηλαδή ο M_g όπου $g = \bar{f} f = |f|^2$, είναι συμπαγής. Αν γράψουμε $\chi = \chi_J$, τότε και ο $M_g M_\chi$ θα είναι συμπαγής. Έχουμε όμως $M_g M_\chi \geq \delta^2 M_\chi$, γιατί για κάθε $\xi \in L^2([0,1])$,

$$\langle M_g M_\chi \xi, \xi \rangle = \int g\chi\xi\bar{\xi} = \int_J g\xi\bar{\xi} \geq \delta^2 \int_J \xi\bar{\xi} = \delta^2 \int \chi\xi\bar{\xi} = \langle \delta^2 M_\chi \xi, \xi \rangle.$$

Θα έπρεπε λοιπόν ο M_χ να είναι συμπαγής (διότι, αν (ξ_n) είναι ορθοκανονική ακολουθία, έχουμε $0 \leq \langle M_\chi \xi_n, \xi_n \rangle \leq \langle M_g M_\chi \xi_n, \xi_n \rangle$ και άρα $\langle M_\chi \xi_n, \xi_n \rangle \to 0$). Αλλά ο M_χ δεν είναι συμπαγής (είναι προβολή σε απειροδιάστατο υπόχωρο).

Σχόλιο Το επιχείρημα μπορεί να μοιάζει πιό εξεζητημένο απ' το προηγούμενο, έχει όμως το πλεονέκτημα ότι αποδεικνύει κάτι γενικότερο: αν A, B είναι θετικοί τελεστές με $A \geq B$ και ο A είναι συμπαγής, τότε και ο B είναι συμπαγής.

Σχόλιο Το (α) αποδεικνύεται και αλγεβρικά: Αν ο M_f έχει πεπερασμένη τάξη n, τότε κάθε οικογένεια $\{M_f\xi_0, \ldots, M_f\xi_n\}$ με $\xi_k \in L^2([0,1])$ πρέπει να είναι γραμμικά εξαρτημένη. Θέτοντας $\xi_k(t) = t^k$, βλέπουμε ότι πρέπει να υπάρχουν σταθερές ώστε $\sum_{k=0}^n c_k M_f \xi_k = 0$, δηλαδή $f(t)p(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ (όπου $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$), πράγμα που σημαίνει ότι $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

10. Στον χώρο Hilbert ℓ^2, θεωρούμε τον τελεστή της μετατόπισης S (με $Se_n = e_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$). Να δειχθεί ότι ο S προσεγγίζεται κατά σημείο από τελεστές πεπερασμένης τάξης, όχι όμως στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(\ell^2)$.

Υπόδ. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζω $F_m e_n = e_{n+1}$ όταν $n \leq m$ και $F_m e_n = 0$ όταν $n > m$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο F_m επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή του ℓ^2, και $F_m(\ell^2) \subseteq \text{span}\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$, άρα ο F_m έχει πεπερασμένη τάξη. Επειδή $Se_n = F_m e_n$ όταν $n \leq m$, για κάθε $x \in \ell^2$ έχουμε

$$\|Sx - F_m x\|^2 = \sum_{n>m} \|\langle x, e_n \rangle e_{n+1}\|^2 = \sum_{n>m} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

έχουμε $\lim_m \|Sx - F_m x\| = 0$: ο S προσεγγίζεται κατά σημείο από τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Από την άλλη μεριά, ο S δεν είναι συμπαγής (διότι $S^*S = I_{\ell^2}$) και συνεπώς δεν μπορεί να προσεγγίζεται από τελεστές πεπερασμένης τάξης στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(\ell^2)$.