Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV

1. Έστω $H = H_0 \oplus H_0$ όπου $H_0 = \ell^2$. Ορίζουμε $M = H_0 \oplus \{0\}$ και $N = \mathrm{Gr}(D_a) := \{x \oplus D_a x : x \in H_0\}$ όπου $D_a \in \mathcal{B}(H_0)$ ο τελεστής $\mathrm{diag}(\frac{1}{n})$.

Δείξτε ότι οι M και N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, αλλά ο $M + N$ δεν είναι κλειστός.

2. Έστω $a = (a(n)) \in c_0$. Δείξτε απευθείας ότι ο διαγώνιος τελεστής $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ απεικονίζει την μπάλα του ℓ^2 σε ολικά φραγμένο σύνολο. [Υπόδειξη προαιρετική: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε ο περιορισμός του D_a στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{e_k : k \geq n\}$ να έχει νόρμα μικρότερη από ϵ.]

3. Έστω $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \otimes y_k^*$ όπου οι οικογένειες$\{x_k\}$ και $\{y_k\}$ είναι ορθοκανονικές. Προφανώς $\|A\| \leq \sum_k |\lambda_k|$. Βρείτε μια καλύτερη εκτίμηση για την $\|A\|$. [Υπόδειξη: τι συμβαίνει όταν $x_k = y_k = e_k$;]

4. Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$.

5. Στον χώρο ℓ^2 θεωρούμε τον τελεστή T όπου

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots) \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2.$$

Δείξαμε ότι ο T δεν έχει ιδιοτιμές. Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο για τον T^*.

Βρείτε το σύνολο των ιδιοτιμών του $S^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$, όπου $S : e_n \to e_{n+1}$.

6. Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή A όπου $(Af)(t) = tf(t),\ f \in L^2([0,1])$. Δείξτε ότι ο A δεν έχει ιδιοτιμές.

Δείξτε ότι κάθε $\lambda \in [0,1]$ είναι "προσεγγιστική ιδιοτιμή", δηλαδή υπάρχει ακολουθία (f_n) με $f_n \in L^2([0,1])$ και $\|f_n\| = 1$ για κάθε n ώστε $\lim_n \|Af_n - \lambda f_n\|_2 = 0$.

Τι συμβαίνει όταν $\lambda \notin [0,1]$;

7. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Αν S_A είναι η προβολή στον υπόχωρο $\overline{A(H)}$, τότε
(α) η $S_A^{\perp} := I - S_A$ είναι η προβολή στον $\ker A$
(β) $S_A A = A$
(γ) αν P είναι προβολή με $PA = A$, τότε $PS_A = S_A$
(δηλ. η S_A είναι η μικρότερη προβολή P που ικανοποιεί $PA = A$).

8. (α) Αν x_n είναι κάθετα ανά δύο διανύσματα ενός χώρου Hilbert H, τότε η σειρά $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\sum \|x_n\|^2 < \infty$.

(β) Αν $H_n,\ n \in \mathbb{N}$ είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι του H, τότε ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_n είναι ο

$$\left\{ \sum_n x_n : x_n \in H_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

9. (α) Να δειχθεί ότι ο μόνος πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f στον $L^2([0,1])$ που έχει πεπερασμένη τάξη είναι ο 0.

(β) Μπορεί ο M_f να είναι συμπαγής;

10. Στον χώρο Hilbert ℓ^2, θεωρούμε τον τελεστή της μετατόπισης S (με $Se_n = e_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$). Να δειχθεί ότι ο S προσεγγίζεται κατά σημείο από τελεστές πεπερασμένης τάξης, όχι όμως στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(\ell^2)$.