Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙ

1. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E. Τότε $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ αν και μόνον αν $x \in \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν ο χώρος $F := \overline{K}$ είναι πλήρης, δείξτε ότι τότε $P_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ για κάθε $x \in E$.

2. *Ο χώρος του Hardy H^2.*
Είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων που έχουν δυναμοσειρές με συντελεστές τετραγωνικά αθροίσιμους: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ με $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|^2 := \|f\|_2 < +\infty$. [1]
Δείξτε ότι ο $(H^2, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Hilbert. Για κάθε $z \in \mathbb{D}$, βρείτε μια $k_z \in H^2$ ώστε $f(z) = \langle f, k_z\rangle$.

3. Έστω H απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Δείξτε ότι η $\{e_n\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του H. (Υπόδειξη: Αν το $x \in H$ είναι τέτοιο ώστε $\langle x, e_k\rangle \neq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (υπάρχουν πάντα τέτοια x;) τότε $x \notin \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$).

4. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$\phi : f \longrightarrow \int_{1/2}^{1} f(t)dt$$

είναι γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$ και ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής, αλλά δεν υπάρχει *συνεχής* συνάρτηση g ώστε $\phi(f) = \langle f, g\rangle$ για κάθε $f \in C([0, 1])$.

5. *Μία υλοποίηση της πλήρωσης.*
Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ονομάζουμε H_1 τον γραμμικό χώρο όλων των *αντιγραμμικών* απεικονίσεων $f : E \to \mathbb{C}$ (δηλ. $f(x + \lambda y) = f(x) + \bar{\lambda} f(y)$ για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{C}$) που είναι συνεχείς.

Με τη νόρμα $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ ο H_1 είναι χώρος Banach.

Για κάθε $x \in E$, η $\phi_x : E \to \mathbb{C} : y \to \langle x, y\rangle$ ανήκει στον H_1 και η απεικόνιση $\phi : E \to H : x \to \phi_x$ είναι γραμμική ισομετρία.

Ορίζουμε $H = \overline{\phi(E)} \subseteq H_1$. (*Είναι αλήθεια ότι $H = H_1$?*)

Να δειχθεί ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle \phi_x, \phi_y\rangle := \langle x, y\rangle$ επεκτείνεται από τον $\phi(E)$ σε ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$ στον H και ότι η νόρμα του H ικανοποιεί $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle_H$ για κάθε $f \in H$.

Επομένως ο $(H, \langle \cdot, \cdot\rangle_H)$ είναι μια πλήρωση του $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$.

6. Δείξτε ότι η απεικόνιση $D : C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \to C_c^{\infty}(\mathbb{R}) : f \to f'$ δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

7. Αν $\phi \in C([a, b] \times [a, b])$, ορίζουμε

$$(Kf)(x) = \int_{a}^{b} \phi(x, y)f(y)dy, \quad f \in C([a, b]).$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση Kf είναι συνεχής στο $[a, b]$.

[1] Τέτοιες δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1, επομένως ορίζουν συναρτήσεις ολόμορφες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.