Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις Ι

1. Δείξτε ότι κάθε μιγαδικός γραμμικός χώρος E είναι γραμμικά ισομορφικός με έναν γραμμικό υπόχωρο ενός χώρου $\mathbb{C}^X$, όπου X κατάλληλο (όχι μοναδικό) σύνολο. Δηλαδή κάθε γραμμικός χώρος "είναι" χώρος συναρτήσεων.

2. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f|^2$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. [Παρατήρηση: Δεν ισχύει το ίδιο για τις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις]

3. Δείξτε ότι ο χώρος $\mathcal{R}([0,1])$ των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων δεν είναι πλήρης ως προς τη ψευδο-μετρική $d_2(f,g) = \|f-g\|_2 = \left(\int |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Μάλιστα, υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) που είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_2$, αλλά δεν υπάρχει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ώστε $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

4. Δείξαμε ότι αν $\{e_n : n = 1, 2\dots\} \subseteq E$ είναι ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενοκαι $x \in E$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(i) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$ (άρα $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$).

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Δείξτε ότι η ισότητα $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$ ισχύει αν και μόνον αν $x \in \overline{F}$, όπου $F = [e_n : n = 1, 2\dots]$.

5. Αν $a_1, \dots, a_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, εξετάστε πότε η παράσταση

$$\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i\, x(i)\overline{y(i)}$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$.

6. Αν $\langle\!\langle \cdot, \cdot\rangle\!\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$, δείξτε ότι υπάρχει $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ ώστε

$$\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x(j)\overline{y(i)}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$. (Υπόδειξη: $a_{ij} = \langle\!\langle e_j, e_i\rangle\!\rangle$).

7. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\!\langle ., .\rangle\!\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

(α) Αποδείξτε ότι $|\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle|^2 \le \langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle . \langle\!\langle y, y\rangle\!\rangle \quad (x, y \in E)$.

(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(γ) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y]\rangle = \langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle ., .\rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

8. Έστω X, Y κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in [0, 1)$ ώστε $|\langle x, y\rangle| \le \lambda \|x\| \|y\|$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Δείξτε ότι ο υπόχωρος $X + Y$ είναι κλειστός.

9. Αν $x_1, \dots x_n$ είναι διανύσματα σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι ο πίνακας $(\langle x_i, x_j\rangle)$ έχει μη αρνητική ορίζουσα, η οποία μηδενίζεται αν και μόνον αν τα $x_1, \dots x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. [Η περίπτωση $n = 2$ είναι ακριβώς η ανισότητα Cauchy-Schwarz.]