28/9/2017

**Άσκηση** Αν $E$ είναι ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος τότε

$\exists\, X \neq \emptyset$ σύνολο και

$T : E \longrightarrow \mathbb{C}^X = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ όλες

γραμμική και 1-1

$\Longleftrightarrow$ $\forall$ γραμμ. χώρος είναι (σρ) ισόμορφος με έναν υπόχωρο κάποιου $\mathbb{C}^X$

[ Μπορώ συνήθως να βρίσκω πολλά $X$.

Π.χ. $E$ = τριγ. πολυώνυμα βαθμού $\leq n$

$E \cong \mathbb{C}^n$ κάποιο μικρό $n$ (πόσο;)

ή $E \subseteq C([0, 2\pi])$

$X = \{1, 2, 3, \ldots n\}$

$X = [0, 2\pi]$ ]

Παραδ. εσωτ. γινομ.:

- $\mathbb{C}: \langle z, w\rangle = z\overline{w}$

  άλλο: $\langle z, w\rangle = 18\, z\overline{w}$

- $\mathbb{C}^n: \langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z(k)\overline{w(k)}$

  $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_{n}$

- $\mathcal{R}[0,1]: \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

  ισχύει: $\langle f, f\rangle = \int |f(t)|^2\,dt \geq 0$

Είναι σωστό ότι: $\langle f, f\rangle = 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; f = 0$ όχι

ΔΕΝ είναι εσωτ. γινόμενο
αλλά μόνο ημι εσωτ.

Παρατ.
κάθε $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ γράφεται:

$$f(t) = (\mathrm{Re} f)(t) + i\,(\mathrm{Im} f)(t)$$

$$\mathrm{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2}, \quad \mathrm{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}$$

$$: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ορίζω: $$\int_0^1 f(t)\,dt := \int_0^1 (\mathrm{Re} f)(t)\,dt + i\int_0^1 (\mathrm{Im} f)(t)\,dt$$

είναι μιγ. αριθμός.

Μπορεί μια $f \in R[0,1]$, $f \neq 0$

να έχει $\int |f|^2 = 0$

Πχ

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \neq 1/2 \\ 3i, & t = 1/2 \end{cases}$$

όρα το $\langle , \rangle$ όχι εσωτ. γινόμ. στον $R[0,1]$

ΟΜΩΣ αν περιοριστώ στον υπόχωρο

$$C([0,1]) \subseteq R([0,1])$$

γραμμ. υπόχωρος

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ γίνεται εσωτ. γινόμενο

διότι (Ανάλ. II) αν $f \in C([0,1])$ και

$$\int |f(t)|^2 dt = 0$$

τότε αναγκαστικά

$f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$

**Πρότ.** Αν $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ έχει εσωτ. γινόμενο:

ορίζω
$$\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$$

τότε: (i) $\|x\| \geq 0$ και $\|x\|=0 \iff x=0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\forall x,y \in E$

**Απόδ** (i) Προφανές από την τελευταία ιδιότητα του $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

(ii) Σύντομα: $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle$
$$= \lambda \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \overline{\langle \lambda x, x\rangle} = \lambda \overline{(\lambda \langle x,x\rangle)} = \lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

(iii) Δ-κή ιδιότητα:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\leq \langle x,x\rangle + |\langle x,y\rangle| + |\langle y,x\rangle| + \langle y,y\rangle$$

CS

$$\leq \|x\|^2 + \|x\|\,\|y\| + \|y\|\,\|x\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \blacksquare$$

Άρα, αν ορίσω:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

τότε $(E, d)$ γίνεται μετρικός χώρος

$\downarrow$

Ανάλυση

Οι γραμμικές πράξεις είναι συνεχείς:

- $(E, \| \ \|) \times (E, \| \ \|) \longrightarrow (E, \| \ \|)$

$$(x, y) \longmapsto x+y$$

συνεχής

<u>Απόδ</u>: $x_\nu \xrightarrow{\| \ \|} x$, $y_\nu \xrightarrow{\| \ \|} y$

τότε $\|(x_\nu + y_\nu) - (x+y)\|$

$$= \|(x_\nu - x) + (y_\nu - y)\|$$

$$\overset{\text{Δ.Α.}}{\leq} \|x_\nu - x\| + \|y_\nu - y\| \longrightarrow 0$$

- $(\mathbb{C}, | \ |) \times (E, \| \ \|) \longrightarrow (E, \| \ \|)$

$$(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$$

συνεχής

<u>Απόδ</u> ~~Βαρύτερη~~. Εύκολη (όπως στον Απειρ)

Επίσης:

$$(E, \| \ \|) \times (E, \| \ \|) \longrightarrow (\mathbb{C}, | \ |)$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

συνεχής

Απόδ $x_n \xrightarrow{\| \ \|} x$ και $y_n \xrightarrow{\| \ \|} y$

Ισχ $\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$

Διότι $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle|$

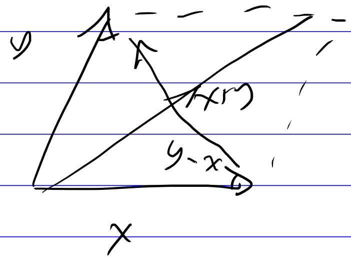
$$= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle|$$

$$\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle|$$

$$\overset{CS}{\leq} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\downarrow \, \|y\|} + \underbrace{\|x\|}_{\downarrow \, \|x\|} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\downarrow \, 0}$$

OK

Κανόνας ▱-μου :




$$\rightarrow \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Αποδ τετριμμένα:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \|y\|^2$$

προσθέτω!

Πορ {Πυθαγόρειο}: όταν $\langle x,y\rangle = 0$ τότε

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Αποδ: Τετριμμένη

Σημασία: Τεράστια. Είναι το κλειδί για τα παρακάτω...

$$(*)\quad 4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

πιστεύετε

$$= \sum_{n=0}^{3} i^n \|x+i^n y\|^2$$

Αντιστρόφως, αν $(E, \|\ \|)$ είναι χώρος με νόρμα

και ΑΝ η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα που θέλουμε,

ΤΟΤΕ η σχέση $(*)$ ορίζει ένα εσωτ. γινόμενο

τ.ω. $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$

Καθεπόλημα:

- $0 \perp x \quad \forall x \in E$

- Αν $w \in E$: $w \perp x \quad \forall x \in E$

τότε

$w = 0$ διότι $w \perp w$

άρα $\langle w, w \rangle = 0$

$\Downarrow$

$w = 0$

- Αν $w \in E$ και $\exists D \subseteq E$ πυκνό ως προς $\| \|$

τ.ω

$w \perp d \quad \forall d \in D$

τότε

$w = 0$

Αποδ Αφού $D$ πυκνό

έχω $w \in \overline{D}$

άρα $\exists (d_n) : d_n \in D \ \forall n$

ώστε

$\| d_n - w \| \to 0$

και όμως

$\langle d_n, w \rangle \to \langle w, w \rangle$

αλλά $\langle d_n, w \rangle = 0 \ \forall n$

$\Downarrow$

$\langle w, w \rangle = 0$

$\underline{1\alpha}$ Αν $\mathcal{E}$ ένα ΟΚ σύνολο στο $E$

τότε

$\mathcal{E}$ είναι γραμμ. ανεξ.

$\underline{\text{Απόδ}}$ Έστω

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \quad \text{ένας} \quad (*)$$

τετρ. γραμμ. συνδυασμός

όπου $x_k \in \mathcal{E}$

$\lambda_k \in \mathbb{C}$

πρέπει νδο $\lambda_k = 0 \ \forall k = 1 \ldots n$

Εσωτερικίζω τη σχέση με καθένα από τα $x_m$ $(m = 1, 2, \ldots n)$

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_m \right\rangle = \langle 0, x_m \rangle = 0$$

$$\|$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x_m \rangle = 0$$

$\|$ ξέρω ότι $\forall \langle x_k, x_m \rangle = 0$ $\underline{\text{εκτός}}$ αν $k = m$

$$\lambda_m \langle x_m, x_m \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

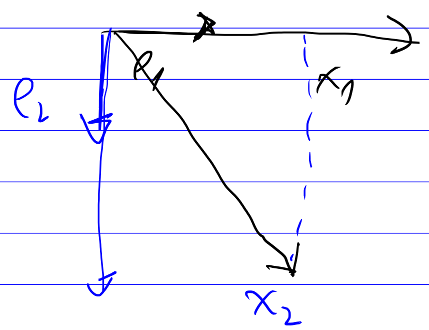
$$\lambda_m = 0$$

Gram-Schmidt. Έχω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ γρ. ανεξ. $\left( \Rightarrow x_n \neq 0 \ \forall n \right)$

ορθοκανονικοποιώ ένα-ένα τα $x_n$:

$x_1 \neq 0 \Rightarrow e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ $\quad \{e_1\}$ είναι ΟΚ

και $[x_1] = [e_1]$



$x_2 \rightsquigarrow \underbrace{x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1}_{\text{οπότε}} = y_2 \rightsquigarrow e_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$

$\left( \quad \right) \perp e_1 \rightsquigarrow \{e_1, e_2\}$ ΟΚ

και βεβαίως $e_2 \in \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$

και $x_2 \in \operatorname{span}\{e_1, y_2\} = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$

άρα $\operatorname{span}\{e_1, e_2\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$

Συνεχίζω επαγωγικά: Δηλ. αν έχω φτιάξει

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ΟΚ

ώστε καλά καλά

τότε ορίζω

$y_{n+1}$ όπως πριν

και $e_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$

και αποδεικνύω ότι καλά καλά

Πρότ. Έστω $F \subseteq E$ γραμμ. υπόχ. με $\dim F < +\infty$

οπότε $\exists\, n \in \mathbb{N}$ και $\exists\, x_1 \ldots x_n \in F$ γρ. ανεξ.

$\mathrm{span}\{x_1, \ldots x_n\} = F$

$\Downarrow$ Gram-Schmidt

Βρίσκω: $e_1 \ldots e_n \in F$ ΟΚ

με $\mathrm{span}\{e_1 \ldots e_n\} = F$

οπότε $\forall\, x \in F \;\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

εσωτερικοποιώ με $e_m$

$$\langle x, e_m \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle e_k, e_m \rangle}_{= \delta_{km}} = \lambda_m \quad \text{ΕΥΡΗΚΑ}$$

dvl

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

$\Downarrow$ (Πυθαγ.) $\perp$ ανά δύο :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\langle x, e_k \rangle e_k\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \underbrace{\|e_k\|^2}_{=1}$$

(baby) Parseval !

Αν $f$ είναι τριγ. πολυώνυμο, τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}(k)|^2$$

όπου $\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

Bessel:

$\{e_1, e_2, \dots\}$ ON, $x \in E$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{u=1}^{n} |\langle x, e_u \rangle|^2 \le \|x\|^2$$

(Anw $\|x\|^2 - \sum_{u=1}^{n} |\langle x, e_u\rangle|^2 = \|x - \sum_{u=1}^{n} \langle x, e_u\rangle e_u\|^2 \ge 0$ $\boxtimes$

$$\Longrightarrow \quad \sup_n \left( \qquad \right) \le \|x\|^2$$

$$\parallel$$

$$\sum_{u=1}^{\infty} |\langle x, e_u\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

Bessel

**Προτ** Αν έχω μια ορθοκανονική οικογένεια σε ένα χώρο με εσωτ. γινόμενο $\{e_t : t \in T\}$ τότε

$$\forall x \in E \quad \underbrace{\{t \in T : \langle x, e_t \rangle \neq 0\}}_{T_x} \text{ αριθμήσιμο}$$

**Απόδ** Έστω $n \in \mathbb{N}$

Θέτω: $T_n = \left\{ t \in T : |\langle x, e_t \rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n} \right\}$

οπότε $T_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$

άρα αρκεί ν.δ.ο. ότι κάθε $T_n$ είναι πεπερασμένο

Ισχύει:

$$\|x\|^2 \underset{(\text{Bessel})}{\geq} \sum_{t \in T_n} |\langle x, e_t \rangle|^2 \geq \frac{\|x\|^2}{n} \underbrace{(\# T_n)}_{\text{πληθάριθμος}}$$

$$\Downarrow$$

$$\# T_n \leq n$$

άρα $T_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ πεπερ $=$ αριθμήσιμο