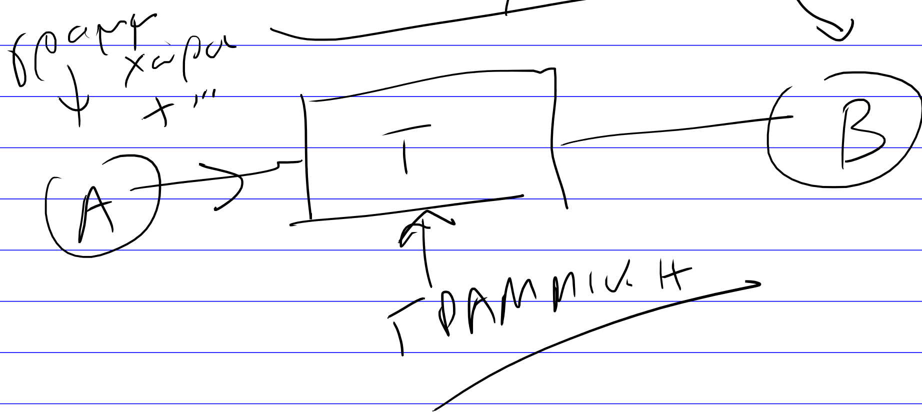
(26/9/2017)

Καλή Χρονιά!



$$\forall x, y \in H_A \xrightarrow{T} Tx, Ty \in H_B$$

$\downarrow$

$\forall \lambda \in$ αριθμ. : $\mathbb{C}$

$$x + \lambda y \in H_A \xrightarrow{T} T(x+\lambda y) \in H_B$$

γραμμή: $T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$

$f, g \in C_1$ με συμπαγή φορέα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'g = -\int fg' \quad (\text{κατά μέρη } \cancel{\text{παραγώγιση}})$$

ορίζω την ασθενή παράγωγο f' της f

Είναι ως εξής: εκείνη η f' που

$$\int f'g = -\int fg' \quad \forall g \text{ καλή}$$

E, F : $\mathbb{C}$-γραμμικοί χώροι

$E \xrightarrow{T} F$: T : $\mathbb{C}$-γραμμική

<u>δηλ</u> $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$x + \lambda y \in E$ $\quad T(x + \lambda y) = \underbrace{T(x) + \lambda T(y)}_{\in F}$

- Παραδ. γραμμ. χώρων

$\mathbb{C}$

$\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \ldots \mathbb{C}^n$

- $c_{00} = \{ x = (x(n)) \quad x(n) \in \mathbb{C}$ τελ. ίσα με $0 \}$

δηλ: $\exists n_x \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_x \quad x(n) = 0$

$x = (x(1), x(2), \ldots x(n_x - 1), 0, 0, \ldots)$

<u>δηλ</u> αν διαλέξω

$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \ldots) \in c_{00}$ (n. θέση)

$\{ e_n : n \in \mathbb{N} \}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητο

$\forall N$, : $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k = 0$

$\Updownarrow$

$= (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, 0, 0, \ldots) = 0$

$\Updownarrow$

$\lambda_k = 0 \quad k = 1, \ldots N$

[Παρατ: $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ ΔΕΝ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{e_n\}$. Είναι ΟΡΙΟ γραμμ. συνδυασμών:

$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k$

$\forall x \in c_{00}$

$$(x(1), x(2), \dots, x(N), 0, \dots) \qquad N = N_x, \quad x(n) \in \mathbb{C}$$

$$\| \quad \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n$$

$\forall x \in c_{00}$ γραφής από $\{e_n : n = 1,2,3,\dots\}$

δηλ. είναι ΒΑΣΗ του c_{00}

(αλγεβρική βάση ή Hamel)

Παράδ. $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$

$= \{x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη$\}$

Θεώρημα (Απειρ II): $\forall x, y \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$

$$x + y \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \lambda x \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$

και το $\int$ με είναι $\underset{\Sigma}{\underline{\text{γραμμική}}}$ απεικόνιση

$$\int(\lambda x + y) = \lambda \int x + \int y$$

Έστω $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

η x γράφεται μοναδικά: $x = u + iv$

$$u = \operatorname{Re} x = \frac{x + \bar{x}}{2}$$

$$v = \operatorname{Im} x = \frac{x - \bar{x}}{2i}$$

Οι u, v παίρνουν πραγμ. τιμές

<u>Ορισμός</u> $x \in \mathcal{R}([0,1]) \iff u, v \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$

και $\int x(t)\,dt := \int u(t)\,dt + i \int v(t)\,dt$

οχι δουλεύουν όλα

Πχ: $\underline{\left| \int x(t)\,dt \right| \le \int |x(t)|\,dt}$ $\quad \forall x : [0,1] \to \mathbb{C}$ R-∫σιμη

c_{00} :

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ με πεπερασμένο φορέα

↑

δηλ $\exists\, n_x \in \mathbb{N}$:

$x(n) = 0 \quad \forall n > n_x$

δηλαδή ο φορέας

$\operatorname{supp} x \subseteq \{1, 2, \dots n_x\}$

$\forall x \in c_{00}$ γράφεται! $x = \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n$

οπότε $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι αλγεβρ βάση του c_{00}

Κάθε γραμμικός χώρος είναι (ισομορφικός με) χώρος συναρτήσεων

δηλ $\forall E$ γραμμ χώρο $\exists$ σύνολο X (Καθόλου μοναδικό) και μια 1-1 γραμμ απεικ

$E \xrightarrow{T} \mathbb{C}^X := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ όλες}\}$

πχ αν $\dim E < \infty$ (δηλαδή $\exists$ γραμμ ανεξ σύνολο πεπερ $\{x_1, x_2, \dots x_N\}$ που $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots x_N\} = E$ ↑ γραμμ θήκη)

τότε E είναι ισόμορφος $\mathbb{C}^X$ όπου $X = \{1, 2, \dots N\}$

πχ $c_{00} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

↳ συναρτ οι $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ που έχουν πεπερ. φορέα

Ενδιαφέρουσα Τετριμμένη Άσκηση:

$\forall$ μιγαδ γραμμ χώρο E $\exists$ σύνολο X ώστε ο E να είναι γραμμικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $\mathbb{C}^X$.

Πρότ $\ell^2 = \{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty \}$

$$\iff \exists\, \|x\|_2^2 \in \mathbb{R} \text{ τ.ω.}$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2 \leq \|x\|_2^2$$

Γνωρίζουμε από 4101 :

ότι απόσταση

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^2 \right)^{1/2}$$

τότε καλά ορισμένη και είναι

μετρική στο ℓ^2

$x, y \in \ell^2$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^2 < +\infty$

$$|x(n) + y(n)|^2 \leq 2|x(n)|^2 + 2|y(n)|^2$$

ως προς την οποία d

ο ℓ^2 είναι ΠΛΗΡΗΣ

μετρικός χώρος

Παρ/ρ $\mathcal{R}([0,1]) \ni f$ τότε και η $|f|^2 \in \mathcal{R}([0,1])$
(why??)

Άρα μπορώ να εφοδιάσω το $\mathcal{R}([0,1])$
με τη μετρική

$$d_2(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$$

$(L(0,1))$

Όμως, $\left(\mathcal{R}([0,1]),\ d_2\right)$ ΔΕΝ είναι πλήρης
(Άσκ 3)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ !!

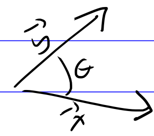
Εσωτερικό Γινόμενο

Παραδείγματα: Στον $\mathbb{R}^3$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta(x,y)$$

διγραμμικό

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|_2^2$$



$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

Στον $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

διγραμμική

$$\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$$

$\mathbb{C}^n$: ο ίδιος ορισμός δεν δίνει $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$

μάλιστα $\langle x, x \rangle$ δεν είναι κατ' ανάγκη $\in \mathbb{R}$.

για παράδ. για $n=1$

$i \cdot i = -1$ ΟΧ!

ενώ: $\|i\|_2^2 = 1$

Γι αυτό ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

στο $\mathbb{C}$: $\langle z, w \rangle = z \bar{w}$

οπότε $\langle z, z \rangle = |z|^2$

στο $\mathbb{C}^n$:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{w}_k$$

κέρδος: $\langle z, z \rangle = \|z\|_2^2$

"δυσκολία" όχι διγραμμικό

- $z \longmapsto \langle z, w \rangle$ γραμμικό $\forall w$
- $w \longmapsto \langle z, w \rangle$ αντιγραμμικό $\forall z$

συζυγώς γραμμικό

δηλ.: $\langle z_1 + \lambda z_2, w \rangle = \langle z_1, w \rangle + \lambda \langle z_2, w \rangle$ $\forall z_1, z_2, w \in \mathbb{C}^n$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle z, w_1 + \lambda w_2 \rangle = \langle z, w_1 \rangle + \langle z, \lambda w_2 \rangle$$

$$= \langle z, w_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle z, w_2 \rangle$$

$\forall z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$

διότι

$$\langle z, w \rangle = \sum z_k \bar{w}_k \Rightarrow \langle z, \lambda w \rangle = \sum z_k \overline{(\lambda w_k)} = \bar{\lambda} \sum z_k \bar{w}_k$$

Συμβολισμοί στην Κβαντομηχανική:

$|x\rangle$: διάνυσμα ~~που~~ βρίσκεται
στη κατάσταση x

$|3\mu V, 4\, m/sec^2, \ldots\rangle$

$\langle x | y \rangle$: bracket (Dirac)

bra ket

$|y\rangle$: διάνυσμα

$\langle x|$: γραμμική μορφή

$\| \; f_x$

$\langle x | y \rangle = f_x(y)$

γραμμ

Πρόταση $\forall\, x, y \in E$: χώρος μ' εσωτ. γινόμενο
ισχύει:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

απόδ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0$

οπότε:

$$0 \le \langle x,x\rangle + \langle x,\lambda y\rangle + \langle \lambda y,x\rangle + \langle \lambda y,\lambda y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\overline{\langle x,y\rangle} + |\lambda|^2\langle y,y\rangle$$

Ειδικότερα, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle y,y\rangle\lambda^2 + (2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)\lambda + \langle x,x\rangle \geq 0$$

$\Downarrow$ (διακρίνουσα!)

$\left(\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \right)$

$$(\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \le 0$$

$$(\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad (*)$$

Τώρα, αν

$z = \langle x,y\rangle = |z|e^{i\theta}$

$$|z| = e^{-i\theta}\langle x,y\rangle = \langle x, e^{i\theta}y\rangle$$

άρα: $|\langle x,y\rangle| = \langle x, e^{i\theta}y\rangle$

$$(*) \Rightarrow \left(\mathrm{Re}\langle x, e^{i\theta}y\rangle\right)^2 \le \langle x,x\rangle\langle e^{i\theta}y, e^{i\theta}y\rangle$$

$$\| $$

$$\left(\langle x, e^{i\theta}y\rangle\right)^2$$

$$\| $$

$$\left(|\langle x,y\rangle|\right)^2$$

δηλ:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle e^{i\theta}y, e^{i\theta}y\rangle =$$

$$\langle x,x\rangle\, e^{i\theta}e^{-i\theta}\langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$