12 Οκτωβρίου 2017

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ON βάση του E

$\forall x \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad (\text{σύγκλιση } \| \ \|)$$

$\forall y \in E$ $\Downarrow$

$$\langle x, y \rangle \overset{\text{γραμμ. + συνέχεια } \langle\,,\rangle}{=} \langle \sum \langle x, e_n \rangle e_n , y \rangle$$

$$= \sum \langle \langle x, e_n \rangle e_n , y \rangle$$

$$= \sum \langle x, e_n \rangle \langle e_n , y \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ επιλέγω μία ο.κ. βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
(∃ τέτοια διότι έχω υποθέσει
ότι E διαχωρίσιμος)

$$U : \underset{\substack{\Psi \\ E}}{x} \longrightarrow \left(\langle x, x_n \rangle\right)_{n=1}^{\infty}$$

$$\underset{\ell^2}{\Uparrow}$$

ℓ^2 διότι: $\sum_n |\langle x, x_n\rangle|^2 < +\infty$

U καλά ορισμένη, γραμμική (προφ)

Parseval: $\|x\|_E^2 = \|Ux\|_{\ell^2}^2$

- $\Rightarrow U$ ισομετρία

- $U(E) \subseteq \ell^2$ πυκνός υπόχωρος

διότι

$$U(x_k) = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \dots)$$

η συνήθης ορθ. βάση του ℓ^2 είναι
στο $U(E)$

άρα $c_{00} \subseteq U(E)$

[άλλως πάρε όποιο $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$
θέλω $\in c_{00}$

να ορίσεις

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in E$$

$$\Downarrow$$

$$U(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$$

άρα $c_{00} \subseteq U(E)$

άρα U: γραμμ. ισομετρία με πυκνή
εικόνα

ΕΡΩΤΗΣΗ: $U(E) \overset{?}{=} \ell^2$

Παρ: $U(E) = \ell^2 \Rightarrow E = U^{-1}(\ell^2)$
τότε είναι πλήρης

(διότι αν (y_n) βασική στον E τότε $(U(y_n))$ βασική
στο ℓ^2 άρα ∃ $z = \lim_n U(y_n)$ οπότε $y_n \to U^{-1}(z)$)

Θεώρ. Αν ο $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι (διαχ.) χώρος Hilbert και $\forall$ επιλογή ΟΚ βάσης $\{x_1,x_2,\dots\}$ του E ορίζει ένα ισομετρικό ισομορφισμό

$$U: E \xrightarrow[1-1]{\text{επί}} \ell^2$$

Απόδ. (Μένει νδο U είναι επί)

Μου δίνουν μια τυχαία (λ_n) του ℓ^2 δηλ: $\lambda_n\in\mathbb{K}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<+\infty$

και θέλω να βρω ένα $x\in E$ ώστε

$$\langle x,x_n\rangle=\lambda_n,\ \forall n=1,2,\dots$$

$$(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1},\dots)\in\ell^2$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ ονομάζω

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\in E$$

κι έχω ελπίδα, διότι

$$U(y_n)=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,0,0,\dots)$$

Θέλω να δείξω ότι $\exists\, y\in E:\ \|y_n-y\|_E\to 0$ οπότε θα έχω τελειώσει διότι

$$\Downarrow$$

$$\|U(y_n)-U(y)\|_{\ell^2}\to 0$$

άρα $U(y)=(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots)$

Αρκεί νδο (y_n) είναι βασική:

$$n>m:\ \|y_n-y_m\|_E^2=\Big\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k x_k\Big\|_E^2$$

$$=\Big\|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k x_k\Big\|_E^2$$

$$\overset{\text{Πυθ}}{=}\sum_{m<k\le n}|\lambda_k|^2 \quad (*)$$

αλλά αφού $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2<+\infty$ τα μερικά αθροίσματα $S_n=\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2$ είναι βασική ακολουθία: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ n,m\ge n_0: |S_n-S_m|<\varepsilon^2$
άρα από $(*)$: $\|y_n-y_m\|_E^2<\varepsilon^2$

[ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\exists$ (Zorn) ορθ. βάση $\{x_i : i \in I\}$ του E

οπότε

$$\sum_{i \in I_0} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall\, I_0 \subseteq I \text{ πεπερασμένο}$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{\substack{I_0 \subseteq I \\ \text{πεπ}}} \left(\sum_{i \in I_0} |\langle x, x_i \rangle|^2 \right) \leq \|x\|^2$$

(μάλιστα $=$)

<u>άρα</u> $\forall\, x \in E$: $(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}$ είναι στον $\ell^2(I)$

Ονομάζω $U : x \longmapsto (\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}$

Είναι ισομετρία.

Όταν ο E είναι πλήρης, αποδεικνύεται ανάλογα με προηγουμένως ότι η U είναι επί]

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ:

Έστω $T : (E, \| \|_E) \longrightarrow (F, \| \|_F)$: γραμμική

νόρμες

(α) T συνεχής (σε κάθε $x \in E$)

$\Downarrow$

(β) T συνεχής στο $0 \in E$ (σίγουρα!)

$\Downarrow$

(γ) T συνεχής σε κάποιο $x_0 \in E$ (και, στο $x_0 = 0$!)

$\Downarrow$

(δ) $\exists M < \infty$: $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E \quad \forall x \in E$

Αποδ:

Αν T συνεχής στο x_0 τότε $\exists \delta > 0$:

τ.ω $\forall z \in E$ με $\|z - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|Tz - Tx_0\|_F < 1$

άρα, $\forall y \in E$, $y \neq 0$ αν θέσω $z = \frac{\delta y}{2\|y\|} + x_0$

τότε $\|z - x_0\| = \left\| \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$

οπότε:

$$\left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|} + x_0\right) - T(x_0) \right\| < 1$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|} + x_0\right) - T(x_0) \right\| < \frac{2}{\delta}$$

$\Downarrow$

$\forall y \neq 0 \quad \|T(y)\| \leq \frac{2}{\delta} \|y\|$

προφανώς και για $y = 0$.

Έδειξα: $\forall y \in E$, $\|T(y)\| \leq M \|y\|$

όπου: $M = 2/\delta$ ▨

(γ) T συνεχής σε κάποιο $y_0 \in E$

$\Downarrow$ το έδειξα.

(δ) $\exists\, M < \infty : \quad \|Ty\|_F \leq M \|y\|_E \quad \forall y \in E$

$\Downarrow$ προφ.

(ε) $\sup\{ \|Ty\|_F : \|y\|_E \leq 1 \} \leq M < \infty$

<u>άρα</u> ο περιορισμός $T\big|_{B_E(0,1)}$ είναι φραγμένη συνάρτηση (από το M)

$\Downarrow$ (*) [στην επόμενη σελίδα]

T είναι ομοιόμορφα συνεχής

$\Downarrow$

T συνεχής παντού

(*) ὑπάρχει $\sup\{ \|Ty\|_F : \|y\|_E \leq 1 \} := N < +\infty$

για κάθε $y, x \in E$ με $x \neq y$

$$Ty - Tx = \frac{T(y-x)}{\|y-x\|} \|y-x\|$$

$$= \underbrace{T\left(\frac{y-x}{\|y-x\|} \right)}_{} \|y-x\|$$

αλλά: $\in B(0,1)$, άρα

$$\left\| T\left(\frac{y-x}{\|y-x\|} \right) \right\| \leq N$$

έπεται $\forall x, y \in E$, $x \neq y$

$$\|Tx - Ty\| \leq N \|x-y\|$$

προφανώς ισχύει και για $x = y$

άρα $\forall \varepsilon > 0$ παίρνω $\delta = \frac{\varepsilon}{1+N}$ και

είναι ΟΚ.

Θεώρ. D πυκνός γραμμ. υπόχ. ενός $(E, \|\ \|_E)$

$(F, \|\ \|_F)$ πλήρης

$T : D \to F$ γραμμική

Τότε

∃ επέκταση $\tilde{T} : E \to F$ γραμμ. + συνεχής

$\iff$ T συνεχής

Απόδ. $(\Longrightarrow)$ προφανής
(αν ∃ συνεχής επέκταση $\tilde{T}$
τότε $T = \tilde{T}|_D$ συνεχής)

Αντίστροφα: T συνεχής, δηλ. φρ.
Θέλω να ορίσω
$\tilde{T}(x)$ σε όλα τα $x \in E$

Έστω $x \in E$
αφού D πυκνός στον E
$\exists (x_n), \ x_n \in D : \|x_n - x\| \to 0$

Θέλω να ορίσω $\tilde{T}(x) = \lim_n T(x_n)$

Δύο προβλήματα: ∃ το όριο; Μήπως εξαρτάται όχι μόνο από το x, αλλά και από την (x_n);

Πρώτα (x_n) συγκλίνει $\Longrightarrow$ (x_n) είναι βασική

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$
$$\|x_n - x_m\|_E < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

(ξέρω ότι $\|T\| < \infty$ διότι T συνεχής)

οπότε $\|Tx_n - Tx_m\|_F \overset{γρ}{=} \|T(x_n - x_m)\|_F$
$$\leq \|T\| \, \|x_n - x_m\|_E$$
$$< \varepsilon$$

έδειξα ότι η (Tx_n) είναι βασική στο F

επομένως το $\lim_n T(x_n)$ υπάρχει.
Το ονομάζω $y_{(x_n)}$

Παρ/ Το $y_{(x_n)}$ εξαρτάται μόνο απ' το x.

διότι αν (x_n') ακολουθία του D

με $\|x_n' - x\|_E \longrightarrow 0$

τότε $Tx_n' \xrightarrow{\|\ \|} y_{(x_n)}$

διότι $\|Tx_n - Tx_n'\|$

$$= \|T(x_n - x_n')\| \leq \|T\|\,\underbrace{\|x_n - x_n'\|}_{\downarrow 0}$$

Οπότε $\lim Tx_n' = \lim Tx_n = y_{(x_n)}$

Έχω λοιπόν

$$E \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow y_x := \lim_n Tx_n$$

$\forall (x_n)$ του D με $x_n \longrightarrow x$

Είναι γραμμική διότι

αν μελετάω $x + \lambda x' \in E$

πάρε $x_n \longrightarrow x$

και $x_n' \longrightarrow x'$ με $x_n, x_n' \in D$

τότε: $T(x_n) \longrightarrow y_x$

$T(x_n') \longrightarrow y_{x'}$

άρα

$$\underbrace{T(x_n) + \lambda T(x_n')}_{= T(x_n + \lambda x_n')} \longrightarrow y_x + \lambda y_{x'}$$

και επειδή $x_n + \lambda x_n' \longrightarrow x + \lambda x'$

έχω

$$T(x_n + \lambda x_n') \longrightarrow y_{x+\lambda x'}$$

$$\Longrightarrow y_x + \lambda y_{x'} = y_{x+\lambda x'}$$

Θέτω λοιπόν $\tilde{T}(x) = y_x$ και έχω

γραμμ. απεικ. $\tilde{T} : E \longrightarrow F$

Παρατηρώ ότι $\forall x \in E$ ισχύει

$$\|\tilde{T}x\| \le \|T\|\,\|x\| \quad (\dagger)$$

πράγματι, αν πάρω ακολουθία (x_n) του D με $x_n \to x$

από τον ορισμό της $\tilde{T}$ έχω

$$Tx_n \to \tilde{T}x$$

άρα $\|\tilde{T}x\| = \lim_n \|Tx_n\|$

$$\|Tx_n\| \le \|T\|\,\|x_n\|$$

άρα $\|\tilde{T}x\| \le \lim_n \|T\|\,\|x_n\| = \|T\|\,\|x\|$

$(\dagger)$ άρα $\tilde{T}$ είναι φραγμ. τελεστής

και μάλιστα

$$\|\tilde{T}\| = \inf\{k>0 : \|\tilde{T}x\| \le k\|x\| \ \forall x \in E\}$$

$$\le \|T\|$$

Από την άλλη, η $\tilde{T}$ είναι επέκταση της T

(διότι αν $x \in D$ μπορώ να πάρω (x_n) : $x_n = x$ $\forall n$

οπότε $\tilde{T}(x) = \lim_n Tx_n = Tx$)

οπότε

$$\|\tilde{T}\| = \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in E, \|x\| \le 1\}$$

$$\ge \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in D, \|x\| \le 1\}$$

$$\sup\{\|Tx\| : \text{"} \quad \text{"}\} = \|T\|$$

άρα $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ: Δύο συνεχείς επεκτάσεις $\tilde{T}$ και T' της T στο E ταυτίζονται στο D που είναι πυκνό, άρα παντού, αφού είναι συνεχείς.