Πρτρ Bessel $\Rightarrow$ Cauchy Schwarz! 5 Οκτ 2017

Bessel: $\{e_1 \dots e_n\}$ ΟΚ χώρο Εσωτ

$$\forall x \in E: \quad \sum_{n=1}^{n} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\Downarrow$$

$n=1$

$\{e\}$ ΟΚ $\Leftrightarrow$ $\|e\|=1$

$$|\langle x, e \rangle| \leq \|x\|$$

$$y \neq 0, \quad e = \frac{y}{\|y\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle\right| \leq \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Cauchy-Schwarz

Παρατήρησε ότι η αποδ. της Bessel χρησιμοποιεί μόνο τον ορισμό του εσωτ. γινομένου (και όχι ότι η $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ είναι νόρμα)

H: με εσωτ.

$$\forall A \neq \emptyset \quad A \subseteq H$$

ορίζω $A^\perp = \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0 \ \forall a \in A\}$

(1) $A^\perp$: κλειστός υπόχωρος του H
με $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$

(2) H : Hilbert τότε: $A^\perp = \{0\} \iff \operatorname{span} A$ πυκνό στον H

Απόδ.

$$x \perp A \overset{\text{γρ. του } \langle \cdot, x\rangle}{\Longrightarrow} x \perp \operatorname{span} A$$

$$\Downarrow \text{ συνέχεια του } \langle \cdot, x\rangle$$

$$x \perp \overline{\operatorname{span} A}$$

Επίσης

$$x \perp \overline{\operatorname{span} A} \Longrightarrow x \perp A$$

άρα $A^\perp = \left(\overline{\operatorname{span}(A)}\right)^\perp$ (χωρίς πληρότητα)

οπότε $A^\perp = \{0\} \iff \left(\overline{\operatorname{span} A}\right)^\perp = \{0\}$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{\operatorname{span} A} = H \quad \blacksquare$$

(3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ προφανές

(4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$ $\quad (A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp$

(5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$ $\quad \overset{(4)}{\Uparrow}$

Απόδ (3): $A \subseteq A^{\perp\perp}$

(3) στο $A^\perp$: $A^\perp \subseteq (A^{\perp\perp})^\perp$

(6) H: Hilbert, E κλειστός υπόχωρος

τότε $E = E^{\perp\perp}$

Απόδ (3) $\Rightarrow E \subseteq E^{\perp\perp}$

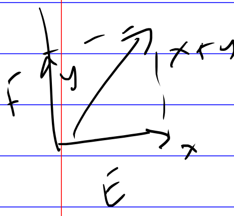
Έστω $E \subsetneq E^{\perp\perp}$. Παρατ. $E^{\perp\perp}$ = κλειστός υπόχ. του H άρα χώρος Hilbert.

άρα $E \subsetneq E^{\perp\perp} \Rightarrow \exists z \in E^{\perp\perp}, z \neq 0$, $z \perp E$

$$\left.\begin{array}{l} z \in E^\perp \\ z \in E^{\perp\perp} \end{array}\right\} z \in E^\perp \cap E^{\perp\perp} = \{0\} \text{ άτοπο}$$

άρα $E = E^{\perp\perp}$

(7) $\mathcal{H}$: Hilbert, E, F κλειστοί υπόχωροι με $E \perp F \Longrightarrow E+F = \{x+y : x \in E, y \in F\}$ κλειστός (υπόχωρος)



Απόδ.

Έστω $z \in \overline{E+F}$

$\exists\, z_n \in E+F : z_n \to z$

αλλά $\forall n$

$\exists\, x_n \in E$, $\exists\, y_n \in F$ ώστε

$$z_n = x_n + y_n$$

νδο (x_n) συγκλίνει (στον E) και (y_n) συγκλίνει (στον F)

$\forall n, m$

όμως $\|x_n - x_m\| \leq \|z_n - z_m\|$

διότι $\|z_n - z_m\|^2 = \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\|^2$

$= \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$ (Πυθ)

$\geq \|x_n - x_m\|^2$

άρα η (x_n) είναι βασική

επομένως συγκλίνει

σε κάποιο $x \in E$ (αφού κλειστός)

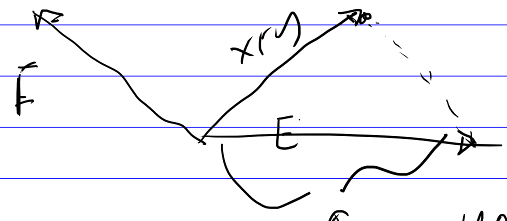
τότε όμως $(y_n) = (z_n - x_n)$ συγκλίνει

στο $z - x$ που

ανήκει στον F

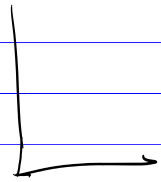
άρα $z = x + (z - x) \in E + F$ ∎

Όταν $E \not\perp F$:



$\forall x$ μπορεί $\|x\| > \|x+y\|$

όταν $E \perp F$:



δεν ισχύει

Πάντα $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

μπορεί όμως να πλησιάζει την =

Αν αυτό δεν πλησιάζει, τότε $E+F$ κλειστό

Δηλ. αν $\exists \lambda < 1$ ώστε

$$|\langle x, y\rangle| \leq \lambda \|x\| \, \|y\|$$

$$\forall x \in E, \ \forall y \in F$$

τότε $E+F$ κλειστός

Δηλ. $\forall x \in E$

$\forall y \in F$ με $\|x\| = 1 = \|y\|$

$$\underbrace{|\langle x, y\rangle|}_{= |\cos\theta(x,y)|} \leq \lambda < 1$$

η (οξεία γωνία $\theta(x,y)$ να φράσσεται μακριά από το 0

~~Θεωρ~~ Αν $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και M ~~κλ~~ κλειστός υπόχωρος, τότε

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$$

δηλαδή $\forall x \in \mathcal{H}$ γράφεται και με μοναδικό τρόπο:

$$x = y + z \,, \quad y \in M, \; z \in M^{\perp}$$

Αποδ: Μοναδικότητα: $x = y + z$ $y, y' \in M$

$= y' + z'$ $z, z' \in M^{\perp}$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{y - y'}_{\in M} = \underbrace{z' - z}_{\in M^{\perp}} \quad \text{αλλά } M \cap M^{\perp} = \{0\}$$

$$\Downarrow$$

$$y - y' = z - z' = 0$$

Τώρα ύπαρξη:

$M, M^{\perp}$ κλειστοί υποχ

$\Downarrow (7)$

$M + M^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$

πρέπει να δείξω ότι $= \mathcal{H}$

Έχω $M \subseteq M + M^{\perp}$

$M^{\perp} \subseteq M + M^{\perp}$

$\Downarrow (4)$

$(M + M^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

$(M + M^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp\perp}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (M + M^{\perp})^{\perp} \subseteq \underbrace{M^{\perp} \cap (M^{\perp})^{\perp}}_{= \{0\}}$$

ο κλ υποχ $M + M^{\perp}$ δεν έχει τίποτα $\perp$ σ' αυτόν

οπότε $= \mathcal{H}$ (πόρισμα πάλι)

Έχω H: χώρος Hilbert, M γν. κλ. υπόχωρος

είδαμε ότι $\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά

$$y = \underset{M}{y_M} + \underset{M^\perp}{y_\perp}$$

Γραμμ. Άλγεβρα: Ορίζω την απεικόνιση:

$$Q_M : H \longrightarrow H$$
$$y \longmapsto y_M$$

- καλά ορισμένη (το y_M ορίζεται μοναδικά)

- γραμμική

έστω: $x = x_M + x_\perp$

$$y = \underset{M}{y_M} + y_\perp$$

και $\lambda \in \mathbb{K}$

$$x + \lambda y = x_M + x_\perp + \lambda y_M + \lambda y_\perp$$
$$= \underbrace{(x_M + \lambda y_M)}_{M} + \underbrace{(x_\perp + \lambda y_\perp)}_{M^\perp}$$

από την άλλη, το $x+\lambda y$ γράφεται μοναδικά

$$x + \lambda y = \underset{M}{z_M} + \underset{M^\perp}{z_\perp}$$

από μοναδικότητα: $z_M = x_M + \lambda y_M$

$$\left.\begin{array}{l} Q_M(x) = x_M, \; Q_M(y) = y_M \\ \Rightarrow Q_M(x + \lambda y) = x_M + \lambda y_M \end{array}\right\} \text{γραμμική}$$

Παρ. $Q_M(x) \in M$ και $x - Q_M(x) \perp M$ άρα (όπως έχουμε δείξει) το $Q_M(x)$ είναι το πλησιέστερο διάνυσμα $P_M(x)$ του M στο x!

$$x = P_M(x) + (x - P_M(x))$$

ξέρω $\perp$

άρα Πυθ:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$$

όπως $\|x\| \geq \|P_M(x)\|$ (Π)

Ισχ. P_M συνεχής στο x.

Αποδ: Αν (x_n) με $x_n \to x$

τότε $\|P_M(x_n) - P_M(x)\|$

$\|$ (P_M γρ)

(ρ)

$$\|P_M(x_n - x)\| \leq \|x_n - x\| \to 0$$

- $P_M : H \longrightarrow H$ γραμμ + συνεχής

- $P_M(H) = M$

όπου $\forall x \in H$

$P_M(x) \in M$

άρα $P_M(H) \subseteq M$

Επίσης $\forall x \in M$ έχω $P_M(x) = x$

άρα $x \in P_M(H)$

Συνεπώς $P_M(H) = M$.

Συνεχείς γραμμ. μορφές.

Έστω $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$.

Σταθ. $x \in E$ και θεωρώ

$$f_x : \begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \longmapsto \langle y, x \rangle \end{array}$$

γραμμική και συνεχής

$|\langle y, x\rangle| \le \|y\| \, \|x\|$

$f_x = \langle x|$ "bra"

$y_\nu \to y$ τότε

$$|f_x(y_\nu) - f_x(y)| \overset{\text{γρ}}{=} |f_x(y_\nu - y)| = |\langle y_\nu - y, x\rangle| \overset{CS}{\le} \|y_\nu - y\| \, \|x\| \to 0$$

Μάλιστα: $f_x(x) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 0$ ανν. $x = 0$

$\{f_x : x \in E\}$ οικογ. γραμμ. συνεχών απεικ.

που καθορίζει την $\|x\|$

με την έννοια ότι

$$\|x\| = \sup\{ |\langle x, y\rangle| : y \in E, \|y\| = 1\}$$

$$= \sup\{ |f_y(x)| : \text{" } \quad \text{"} \}$$

διότι αφενός $\forall y \in E, \|y\| = 1$

$$|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \, \|y\| = \|x\|$$

αφετέρου αν $x \ne 0$ βάζω $y_0 = \frac{x}{\|x\|}$

$$|f_{y_0}(x)| = \left|\left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| = \|x\|$$

Ειδικότερα, η $\{f_x : x \in E\}$ χωρίζει τον E

διότι αν $y_1 \ne y_2$ τότε

μπορώ $x = y_1 - y_2$

με $f_x(y_1) \ne f_x(y_2)$

<u>Παρ/γ</u> $E = (C_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι μ' εσωτ. γινόμενο

Ορίζω: $f: C_{00} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x = (x(n)) \longrightarrow \sum_{n=1}^{n_x} \frac{1}{n} x(n)$$

εύκολα δείχνει ότι γραμμ. + συνεχής

<u>αλλά</u> $\nexists\, y \in C_{00}$ με

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in C_{00}$$

Σε πλήρεις χώρους, τέτοιοι παράδειγματα <u>δεν</u> συμβαίνουν:

<u>Θεώρημα Riesz</u> Αν $\mathcal{H}$ χώρος <u>Hilbert</u> τότε $\forall f: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμική <u>και</u> συνεχή

<u>Είναι</u> της μορφής $f = f_x$ με κάποιο (μάλιστα μοναδικό) $x \in \mathcal{H}$

Έστω $f : H \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ γραμμ. + συνεχής

<u>Απόδ.</u> Αν $f = 0$ τότε ισχύει:

$$f(x) = \langle x, 0 \rangle \quad \forall x \in E$$

Αν όχι, θεωρώ $M = \operatorname{Ker} f = \{x \in H : f(x) = 0\}$

f γραμμ. $\Rightarrow M$ γραμμ. υπόχ.

f συνεχ. $\Rightarrow M$ κλειστό

$f \neq 0 \Rightarrow M \neq H$

(Άρα) !! $\exists\, z \in H,\ z \neq 0,\ z \perp M$

Παίρνω ένα τυχόν $x \in H$ και πρέπει:

$$f\big(x f(z) - z f(x)\big) = f(x) f(z) - f(z) f(x) = 0$$

<u>οπότε</u> $\forall x \in H$ το

$$x f(z) - z f(x) \in \operatorname{Ker} f = M$$

άρα

$$\langle x f(z) - z f(x), z \rangle = 0$$

$$\Rightarrow f(z) \langle x, z \rangle - f(x) \langle z, z \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{f(z)}{\langle z, z \rangle} \langle x, z \rangle$$

$$f(x) = f_y(x) \quad \text{όπου } y = \frac{z\,\overline{f(z)}}{\|z\|^2}$$

<u>Μοναδικότητα</u>. Αν $f(x) = f_{y'}(x) \ \forall x \in H$

τότε $= f_y(x) \ \forall x \in H$

άρα θέτοντας $x = y - y'$ βρίσκω

$\underline{x = 0}$ δηλ.:

$$\langle y - y', y' \rangle = \langle y - y', y \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle y - y', y' - y \rangle = 0 \Rightarrow \|y' - y\| = 0$$

Ορθ. Βάσεις και Αλγεβρ. Βάσεις:

$E = (c_{00}, \langle \, , \, \rangle)$ $\quad e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-θέση}}}{1}, 0, \dots)$

Ξέρω ότι είναι ΟΚΒ

επειδή ότι $\forall x = x(n) \in c_{00}$

γράφεται:

$$x = \sum_{n=1}^{n_x} x(n) e_n$$

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση, αλλά και αλγεβρ. βάση

<u>Όμως</u>

$E = (\ell^2, \langle \, , \, \rangle)$ πάλι τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ΟΚΒ.

και $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = c_{00} \neq \ell^2$

όμως $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\,\|_2} = \ell^2$

άρα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα ΟΚΒ του ℓ^2 αλλά <u>δεν</u> είναι αλγεβρική βάση

Έστω $\mathcal{E} \subseteq H$ ΟΚ οικογένεια

- Αν $\exists\, z \in H,\ z \neq 0,\ z \perp \mathcal{E}$

  τότε $\left\{ \frac{z}{\|z\|} \right\} \cup \mathcal{E}$ ΟΚ οικογένεια

  οπότε η $\mathcal{E}$ δεν είναι μεγιστική

- Αν $\mathcal{E}$ δεν είναι μεγιστική

  τότε $\exists\, e \in H$, τ.ω. $\mathcal{E} \cup \{e\}$ είναι ΟΚ

  οπότε $e \neq 0$ $(\|e\| = 1)$

  και $e \perp \mathcal{E}$

  $\Downarrow$

  $e \perp \overline{\operatorname{span} \mathcal{E}}$

  άρα $\overline{\operatorname{span} \mathcal{E}} \neq H$

  οπότε $\mathcal{E}$ δεν είναι ΟΚ βάση του H

- Αν $\mathcal{E}$ δεν είναι ΟΚΒ του H

  τότε ο $\overline{\operatorname{span} \mathcal{E}}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H : Hilbert

  Άρα $\exists\, z \in H,\ z \neq 0,\ z \perp \operatorname{span} \mathcal{E}$

Προτ.
E διαχωρ. χώρος με εσωτ. γινόμενο
(δηλ. $\exists \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό $\subseteq E$)

Έστω $F \subseteq E$ γραμμ. υπόχ., πυκνός

Τότε $\exists \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ΟΚ βάση του E
με $f_n \in F$ $\forall n$ ∎

Απόδ. • F είναι και αυτός διαχ. (4.0.1)
Έστω $\mathcal{G} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F$ αριθμ.
πυκνό

Εφαρμόζω "κόσκινο":
$\mathcal{U} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$
με $\text{span}\,\mathcal{U} = \text{span}\,\mathcal{G}$

Ονομάζω u_1 το πρώτο $\neq 0$ στοιχείο g_{n_1} του $\mathcal{G}$
και θεωρώ τα $\{g_{n_1}, g_n\}$ με $n > n_1$
το πρώτο n ώστε $\{g_{n_1}, g_n\}$ γραμμ.
ανεξ. το ονομάζω g_{n_2}. Θέτω
$u_2 = g_{n_2}$

Συνεχίζω επαγωγικά
προκύπτει μια γραμμ. ανεξ. ακολουθία
$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ με
$$\text{span}\,\mathcal{U} = \text{span}\,\mathcal{G} \subseteq F$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{\text{span}\,\mathcal{U}} \supseteq \overline{\mathcal{G}} = H$$

Τώρα στην $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ κάνω Gram-Schmidt
και προκύπτει
$\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ ορθοκανονική
ώστε $\text{span}\,\mathcal{F} = \text{span}\,\mathcal{U}$

οπότε $\overline{\text{span}\,\mathcal{F}} = \overline{\text{span}\,\mathcal{U}} \supseteq \overline{\mathcal{G}} = H$

δηλαδή η $\mathcal{F}$ είναι ΟΚ βάση του E
με $\mathcal{F} \subseteq F$.

Αντίστροφα, αν ένας χώρος με νόρμα E

έχει αριθμ. συν. βάση $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

τότε είναι διαχ.

Απόδ.

Θεωρώ $F = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{n_k} \text{ όπου } m\in\mathbb{N} \text{ και } \lambda_k \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q} \right\}$

(δηλ. $Re\lambda_k, Im\lambda_k \in \mathbb{Q}$). Αυτό είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο (γιατί;)

και είναι πυκνό στον E διότι

αν $x\in E$ και $\epsilon>0$

μπορώ να βρω $\sum_{k=1}^{m} c_k x_k = y$
(όπου $c_k\in\mathbb{C}$)

ώστε $\|x-y\|<\epsilon/2$

διότι $\overline{span\{x_n : n\in\mathbb{N}\}} = E$

Τώρα που έχω $c_1, c_2, \dots, c_m$
(πεπ. πλήθος) μπορώ $\forall k=1,\dots,m$

να βρω $\lambda_k \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$

$$|\lambda_k - c_k| < \frac{\epsilon}{2m}$$

οπότε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \right\| < \frac{\epsilon}{2} + m\frac{\epsilon}{2m} = \epsilon$$

∎