31 Οκτ

<u>Ιδ</u> $T, S : H_1 \to H_2$ γρ + φρ

$\lambda \in \mathbb{C}$

Ισχύει: $(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$

Απόδ

$$\langle (T+\lambda S)^* y, x \rangle_1 \overset{\text{op}}{=} \langle y, (T+\lambda S)x \rangle_2 \quad \forall x \in H_1 \quad \forall y \in H_2$$

$$= \langle y, Tx + \lambda Sx \rangle$$

$$= \langle y, Tx \rangle + \bar{\lambda} \langle y, Sx \rangle$$

$$\overset{\text{op}}{=} \langle T^* y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle S^* y, x \rangle$$

$$= \langle T^* y + \bar{\lambda} S^* y, x \rangle$$

$$= \langle (T^* + \bar{\lambda} S^*) y, x \rangle \quad \forall x \in H_1 \quad \forall y \in H_2$$

$$\Downarrow$$

$$(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$$

(β) $$H_1 \xrightarrow{T} H_2$$

$$H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$$

$$H_1 \xrightarrow{(T^*)^*} H_2$$

<u>νδο</u> $T^{**} = T$

<u>αρκεί</u> $\forall x \in H_1 \ \forall y \in H_2$ νδο

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle_2 \overset{?}{=} \langle Tx, y \rangle_2$$

$\Big\|$ (ορ του $(T^*)^*$)

$$\langle x, T^* y \rangle_1 \overset{(\text{ορ. του } T^*)}{=} \langle Tx, y \rangle_2 \quad \text{οκ}$$

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$

<u>Αρκεί</u> $$\|T^*\| = \sup\{ |\langle T^* y, x \rangle| : \forall x \in B_{H_1}, \forall y \in B_{H_2} \}$$

$$= \sup\{ |\langle y, Tx \rangle| \quad \text{'' ''} \}$$

$$= \sup\{ |\langle Tx, y \rangle| \quad \text{'' ''} \}$$

$$= \|T\| \qquad \text{οκ}$$

(δ) $ST : H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$

$(ST)^* : H_3 \longrightarrow H_1$ νδο $(ST)^* = T^* S^*$

$$H_3 \xrightarrow{S^*} H_2 \xrightarrow{T^*} H_1 \quad ?$$

$\forall x \in H_1, z \in H_3$ έχω:

$$\langle (ST)^* z, x \rangle_1 \overset{\text{ορ}}{=} \langle z, (ST)x \rangle_3 = \langle z, S(Tx) \rangle_3$$

$$\overset{\text{ορ}}{=} \langle S^* z, Tx \rangle_2$$

$$\overset{\text{ορ}}{=} \langle T^* S^* z, x \rangle_1$$

$$\Downarrow$$

$$(ST)^* = T^* S^* \quad \blacksquare$$

Μαγική: $\|T^*T\| = \|T\|^2$ ιδιότητα C^*

Απόδ. $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\,\|T\|$

$$= \|T\|\,\|T\| = \|T\|^2$$

από την άλλη: $\forall x \in H_1$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*(Tx), x\rangle$$

$$= \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\,\|x\|$$

$$\leq \|T^*T\|\,\|x\|^2$$

$\Rightarrow$

$$\|Tx\| \leq \|T^*T\|^{1/2}\,\|x\| \quad \forall x \in H_1$$

αλλά $\|T\| = \inf\{K : \|Tx\| \leq K\|x\| \ \forall x\}$

$$\|T\| \leq \|T^*T\|^{1/2} \quad \checkmark$$

Παρ. $H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$

ο $T^*T : H_1 \to H_1$ φρ. τελ.

ενώ ο $TT^* : H_2 \to H_2$ " "

Είναι άλλος τελεστής, εν γένει (ακόμα και όταν $H_1 = H_2$)

<u>Παρ/γ</u> $S: \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$
που $Se_n = e_{n+1} \quad \forall n \geq 0$

ξέρω $S^* e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \forall n \geq 1 \\ 0 & , n=0 \end{cases}$

οπότε $S^* S(e_n) = S^*(e_{n+1}) = e_n \quad \forall n \geq 0$

άρα $S^*S = I$ ($\{e_n\}$ ουν βάση)

αντίθετα: $S S^*(e_n) \overset{(n\geq 1)}{=} S(e_{n-1}) = e_n$

$S S^*(e_0) = S(0) = 0$

<u>άρα</u> $SS^*(e_n) = \begin{cases} e_n, & n \geq 1 \\ 0 & , n=0 \end{cases}$

$SS^* \neq S^*S$

- ο S^*S είναι προφανώς ισομετρία (αφού δεν κάνει τίποτα)
- ο SS^* <u>δεν</u> είναι ισομετρία (αφού $SS^*e_0 = 0$)

Έχει όμως $\|SS^*\| = 1$

διότι $\|SS^*\| \leq \|S\| \|S^*\| = \|S\|^2 = 1$

και $\|SS^*(e_{19})\| = \|e_{19}\| = 1$

άρα $\|SS^*\| \geq 1$ $\boxed{}$

Ορισμός Μια C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

(δηλ. γραμμ. χώρος και δακτύλιος και $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ $\forall x,y \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$

με μια $\| \ \|$ που είναι πλήρης τ.ω.

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a,b \in \mathcal{A}$$

και μια ενέλιξη τ.ω.

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

Παράδ. $(C(K), \| \ \|_\infty)$ K συμπ. (π.χ. μετρ.)

Παράδ. $(\mathcal{B}(H), \| \ \|)$: H Hilbert

Τα δύο θεωρήματα:

(1) Κάθε μεταθετική C^*-αλγ. με μονάδα "είναι" $\approx C(K)$ για κατάλληλο (μοναδικό) K

(2) Κάθε C^*-άλγεβρα είναι $\| \ \|$-κλειστή $*$-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ για κάποιο H : Hilbert (όχι μοναδικό)

Υπενθ. $f \in C([a,b])$ ο τελεστής $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$

$$M_f(g) = fg \quad \text{για } g \in C([a,b])$$

δείξαμε ότι επεκτείνεται σε φρ τελ $L^2 \to L^2$

Έχουμε δείξει

$$M_f^* = M_{\bar f}$$

Επίσης: $\underline{M_f M_h} = \underline{M_{fh}}$

Απόδ. $\forall g$ συνεχής, $M_f M_h(g) = M_f(M_h(g))$

$$= M_f(hg) = f(hg)$$
$$= (fh)(g)$$
$$= \underline{M_{fh}(g)}$$
$$\forall g \in C([a,b])$$

άρα, οι $M_f M_h$ και M_{fh} που είναι και οι δύο συνεχείς (φρ) ταυτίζονται στο πυκνό υπόχωρο $C([a,b])$ του $L^2([a,b])$

άρα $M_f M_h = M_{fh}$

άρα $\underline{M_f^*} M_f = M_{\bar f} M_f = M_{\bar f f} = M_{f \bar f} =$

$$= M_f M_{\bar f} = \underline{M_f M_f^*}$$

Έχω μια απεικόνιση:

$$M : C([a,b]) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2([a,b]))$$
$$f \longmapsto M_f$$

(i) γραμμική

(ii) πολλαπλασιαστική $(M_{fh} = M_f M_h)$

(iii) διατηρεί $*$: $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$

(iv) ισομετρία $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

$\rightsquigarrow$ M είναι μια $(*)$-αναπαράσταση

της C^*-αλγ $C([a,b])$ μέσα στην

$\mathcal{B}(L^2([a,b]))$

αλλιώς: αναπ. της $C([a,b])$ στον χώρο $L^2([a,b])$

$$C([a,b]) \curvearrowright L^2([a,b])$$

Παράδ. $D : C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ (δεν είναι Hilbert)
$f \longmapsto f'$

Δείξαμε $\langle Df, g\rangle = -\langle f, Dg\rangle$

$\forall f, g$ στο $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\Updownarrow$$

$$\langle (iD)f, g\rangle = \langle f, (iD)g\rangle$$

όπως ο τελεστής $P = iD$ έχει ότι:

$\langle Pf, g\rangle = \langle f, Pg\rangle \quad \forall f, g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$

λέγεται Ερμιτιανός

αυτοσυζυγής λέγεται όταν
επιπλέον το πεδίο ορισμού
του P^* είναι
το ίδιο με το Π.Ο. του P

$$F : L^2([-\pi,\pi]) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

όπου $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$

$= \langle f, e_n\rangle, \ n\in\mathbb{Z}$

όπου $e_n(t) = e^{int}$

είναι F συνεχής και δείξαμε ότι

$$\|f\|_{L^2} = \|(\hat{f}(n))\|_{\ell^2}$$

άρα επεκτείνεται σε ισομετρία
από το $L^2([-\pi,\pi])$ στον $\ell^2(\mathbb{Z})$

να είναι και επί δείτε ...

$$F(L^2([-\pi,\pi])) \supseteq \underbrace{F(\text{τριγ. πολ.})}_{= c_{00}(\mathbb{Z})}$$

$$F^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([-\pi,\pi])$$
ικανοποιεί:

$\forall\, a = (a(n)) \in c_{00}(\mathbb{Z})$

θέτω $f_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e_n$ (τριγωνομ. πολ.)

οπότε $\hat{f}_a(n) = \langle f_a, e_n\rangle = a(n)$

άρα $F^*(a) = f_a$

όπως: $F^*F : L^2([-\pi,\pi]) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([-\pi,\pi])$

Αν f: τριγ. πολυώνυμο

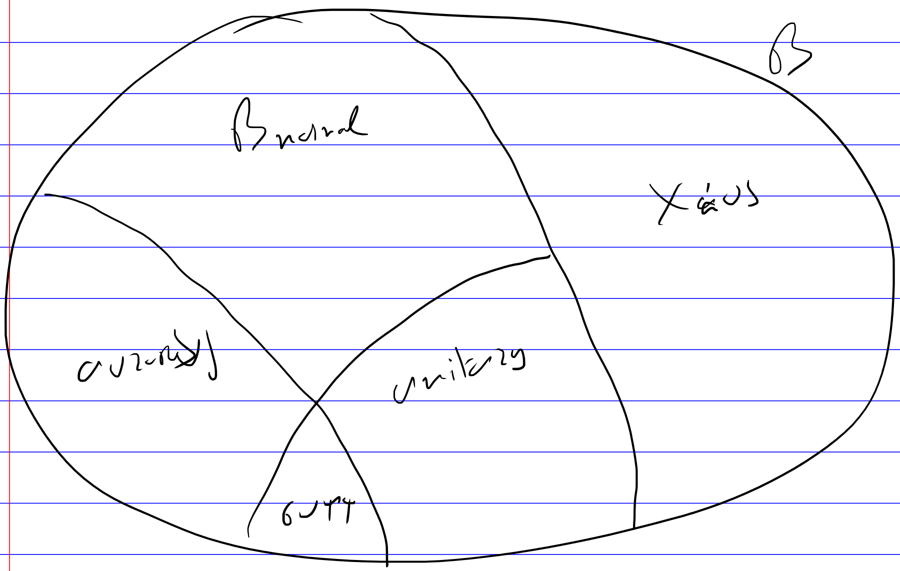
$$f \xmapsto{F} (\hat{f}(n)) \xrightarrow{F^*} f_{(\hat{f}(n))} = f$$

άρα $F^*F = I_{L^2}$

$$FF^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([-\pi,\pi]) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

Αν $\underset{c_{00}(\mathbb{Z})}{\underset{\cap}{a=(a(n))_n}} \longrightarrow f_a \longrightarrow \underset{(a(n))}{\underset{\|}{(\hat{f}_a(n))}}$

άρα $FF^* = I_{\ell^2(\mathbb{Z})}$



Πρότ. $T: H \to H$ φραγμ. είναι normal ανν
$$\forall x \in H: \|Tx\| = \|T^*x\|$$
(Πρβλ. T αυτοσυζ. $\Leftrightarrow$ $Tx = T^*x$ $\forall x \in H$)

Απόδ. $TT^* = T^*T$
$$\Updownarrow$$
$$\langle TT^*x, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle \quad \forall x, y \in H$$
$$\Downarrow \quad \Uparrow \text{(polarisation)}$$
$$\langle \underline{TT^*x}, x\rangle = \langle \underline{T^*Tx}, x\rangle \quad \forall x \in H$$
$$\left(4\langle Ax, y\rangle = \langle A(x+y), (x+y)\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), (x+iy)\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\langle T^*x, T^*x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \quad \forall x \in H$$
$$\Updownarrow$$
$$\|T^*x\| = \|Tx\| \quad \forall x \in H$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ H

Πρτ $T = T^* \iff \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$

Απόδ Αν $T = T^*$ τότε

$$\langle Tx, x\rangle = \langle T^*x, x\rangle \quad \forall x$$

αντίστροφα αν

$$\langle Tx, x\rangle = \langle T^*x, x\rangle \quad \forall x$$

$\Downarrow$ πόλωση.

$$\langle Tx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle \quad \forall x, y$$

$$\Downarrow$$

$$T = T^*$$

Πορ Όταν $T = T^*$, τότε

$$\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H \}$$

(απόδ έχει λύση)

Πρόταση $U: H_1 \to H_2$ είναι ισομετρία αν και μόνο αν

$$\boxed{U^*U = I_{H_1}}$$

αν και μόνο αν

$$\langle Ux, Ux'\rangle_2 = \langle x, x'\rangle_1 \quad \forall x, x' \in H_1$$

Απόδ.
$\forall x \in H_1$, $\|Ux\|_2^2 = \langle Ux, Ux\rangle =$

$$= \langle U^*Ux, x\rangle$$

άρα U ισομετρία αν και μόνο αν

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle \quad \forall x \in H_1$$

$\Updownarrow$ πόλωση

$$\langle U^*Ux, x'\rangle = \langle x, x'\rangle \quad \forall x, x' \in H_1$$
$$= \langle Ix, x'\rangle$$

$\Updownarrow$

$$U^*U = I_{H_1}$$

$\Updownarrow$

$$\langle Ux, Ux'\rangle = \langle x, x'\rangle \quad \forall x, x' \in H_1$$

Πρόταση $U: H_1 \to H_2$ unitary

$\Updownarrow$

U ισομετρία και επί

Απόδ. Αν U unitary, τότε $U^*U = I_{H_1} \Rightarrow$ ισομετρία

και $UU^* = I_{H_2}$ προκύπτει

ότι ο U είναι επί

αφού $\forall y \in H_2$ θέτω $x = U^*y$

οπότε $Ux = UU^*y = y$

Αντίστροφα:

Αν U ισομετρία και επί

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow ?$$

$$U^*U = I_{H_1} \qquad\qquad UU^* = I_{H_2}$$

Αρκεί: πάρε $y \in H_2$ νδο $UU^*y = y$

όμως U επί: $\exists\, x \in H_1$ ώστε
$$y = Ux$$

οπότε
$$UU^*y = UU^*(Ux)$$
$$= U(U^*U)x = Ux$$
$$= y \qquad \blacksquare$$

Μερική ισομετρία λέγεται ένας

$$V : H_1 \longrightarrow H_2$$

όταν $V\big|_{(\ker V)^\perp}$ είναι ισομετρία

Δηλ. γράφω $H_1 = (\ker V)^\perp \oplus \underset{\{x \,:\, Vx = 0\}}{\underset{\shortparallel}{\ker V}}$

όπου αν $x \in (\ker V)^\perp$ και $y \in \ker V$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\;V\;} \begin{bmatrix} Vx \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και } \|Vx\| = \|x\|$$

<u>Άσκηση</u> V μερική ισομετρία

$$\Updownarrow$$

V^* μερ. ισομ.

<u>Ορ</u> ο $(\ker V)^\perp :=$ αρχικός χώρος του V

και ο $V(H_1) = V((\ker V)^\perp)$

$=$ τελικός χώρος του V

Είναι και οι δύο κλειστοί υπόχωροι

$$E = (\ker V)^\perp \subseteq H_1$$

$$F = V(H_1) \subseteq H_2$$

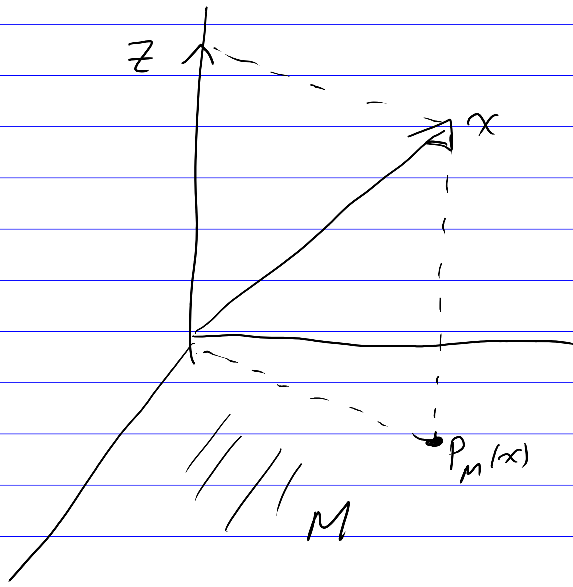
$V\big|_E : E \to F$ ισομετρία επί

$V^*\big|_F : F \to E$ ισομετρία επί

[Παρατ: ο $V(H_1)$ είναι κλειστός

Αυτό δεν ισχύει γενικά για φρ. τελεστές

Γιατί?]



$$z = x - P_M(x)$$

$$\mathrm{dist}(x, M) = \mathrm{dist}(z, M) = \|z\|$$