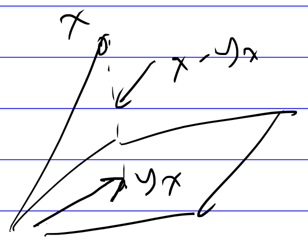
3 Οκτωβρίου

Επανάληψη:

$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ με εσωτ. γινόμενο, $x \in E$,
$F \subseteq E$ γραμμ. υπόχ. με $\dim F < +\infty$

Τότε $\exists\, y_x \in F$ ώστε $\|x - y_x\| = \operatorname{dist}(x, F)$



Απόδ.

$\delta = d(x,F) := \inf\{\|x-y\| : y \in F\}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, y_n \in F \quad \|x - y_n\| < \frac{1}{n} + \delta$

προφ. $\|y_n\| \leq \|x\| + \frac{1}{n} + \delta \quad \forall n$

$\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ φραγμ. $\subseteq F$

οποίο έχει $\dim F < +\infty$

Επειδή $\dim F < +\infty$! $\Downarrow$ B-W

$\exists\, (y_{k_n})$ υπακ. της (y_n)
που $y_{k_n} \to y_0$

$\dim F < +\infty$ είναι κλειστό (γιατί;)
άρα $y_0 \in F$

οπότε

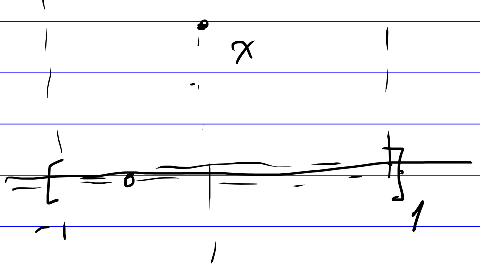
$$\delta \leq \|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_{k_n}\| = \delta$$

άρα $\|x - y_0\| = \delta$

Μοναδικότητα του y_0: Δεν ισχύει
πάντα σε $(E, \|\ \|)$

παράδ. $E = (\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$

$F = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}$, $x = (0,1)$



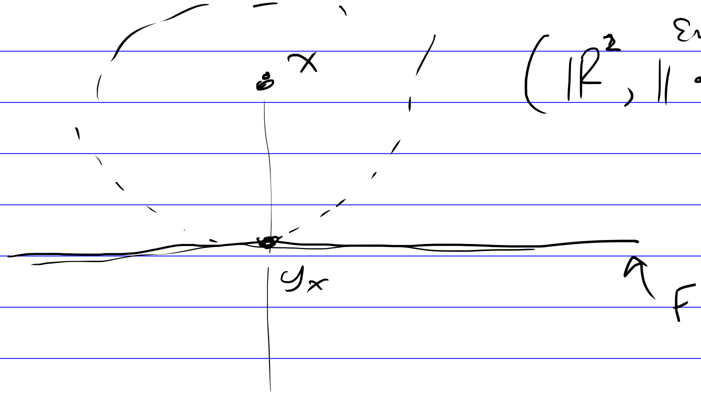
$\operatorname{dist}(x, F) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|(0,1) - (t,0)\|_\infty$

Αλλά:

$$\|(0,1) - (t,0)\|_\infty = \|(-t,1)\|_\infty = \max\{|-t|, 1\} \leq 1$$

όταν $|t| \leq 1$

όλα τα σημεία $y_x = (t,0)$, $|t| \leq 1$
έχουν την ίδια απόσταση απ' το $(0,1)$



Ενώ αν είχα: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) = E$

τότε θα ήταν μόνο το $(0,0)$

Έστω τώρα ότι: $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}$

Έστω $y_1, y_2 \in F$ με $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d$

$\|(x-y_1)+(x-y_2)\|^2 +$ (κανόνας //)

$+ \|(x-y_1)-(x-y_2)\|^2$

$= 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2$

$\Rightarrow \|2x-(y_1+y_2)\|^2 + \|y_1-y_2\|^2 =$ " "

$\Rightarrow$

$0 \le \|y_1-y_2\|^2 = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2 -$

$- 4\left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2$

Αλλά $\frac{y_1+y_2}{2} \in F$ άρα $\left\|x-\frac{y_1+y_2}{2}\right\| \geq d$

άρα

$0 \le \|y_1-y_2\|^2 \le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ ∎

Τι να κάνουμε στα F δηλ. έχει ΛΣΑ. δυαλ.;

Έστω F κλειστός υπόχωρος ενός E με εσωτ. γινόμενο

και $x \in E$.

Να βρώ, αν $\exists!$ $y_x \in F$ τ.ω. $\|x - y_x\| = \mathrm{dist}(x, F) = d$

Προσπάθεια

Από ορισμό inf, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $y_n \in F$:

$$\|x - y_n\| < d + \frac{1}{n}$$

Όπως πριν, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμ.

ΚΑΙ ΤΙ ΕΓΙΝΕ?

Πάμε ψάχνοντας στα ζεύγη: $n, m \in \mathbb{N}$

$x - y_n$, $x - y_m$ κανόνα Π

$$\|y_n - y_m\|^2 \le 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\underbrace{\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2}_{\ge d^2}$$

$$\le 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2$$

$$\le 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2$$

$$= 4d\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \longrightarrow 0$$

όταν $n, m \to \infty$

$\rightarrow$ Επιβάλω τη επιπλέον υπόθεση ότι ο $(F, \|\ \|)$ είναι πλήρης χώρος

οπότε η (y_n) συγκλίνει

σε κάποιο $y_x \in F$

Οπότε $\|x - y_x\| = d$

Ορισμός

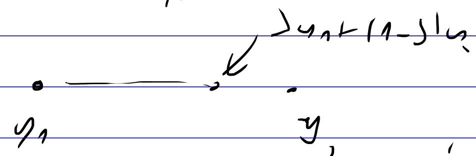
Ένα $F \subseteq E$

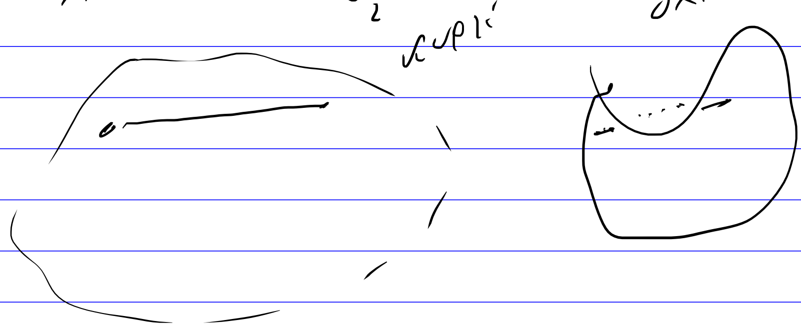
E: $\mathbb{K}$ - γραμμ. χώρος

λέγεται <u>κυρτό</u> $\forall\, y_1, y_2 \in F$

το ευθ. τμήμα $[y_1, y_2] \subseteq F$

δηλ. $[y_1, y_2] = \{\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2,\ 0 \le \lambda \le 1\} \subseteq F$





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$\ell^2 = \{ x = (x(n)) : \quad x(n) \in \mathbb{C} \ \forall n \ \text{και} \ \sum |x(n)|^2 < +\infty \}$$

$$\cup |$$

$$c_{00} = \{ x = (x(n)) : \quad \exists n_x \in \mathbb{N} : \ \text{τ.ω} \ x(n) = 0 \ \forall n > n_x \}$$

Είναι προεγμ. χώρος λόγω κάποιας ανισότητας

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \overline{y(n)}$$

Πρέπει συγκλίνει απόλυτα από C-S:

$$\sum |x(n) \overline{y(n)}| \le \left(\sum |x(n)|^2 \sum |\overline{y(n)}|^2 \right)^{1/2}$$

αυτό είναι εσωτ. γινόμενο, και

$$\langle x, x \rangle = \sum_n |x(n)|^2 = \|x\|_2^2$$

Πρόλ $(\ell^2, \| \ \|_2)$ είναι πλήρης

Απόδ 401

$$c_{00} \subseteq \ell^2$$

πυκνός στο ℓ^2, με άλλα λόγια:

$$\forall x \in \ell^2, \ \forall \epsilon > 0 \ \exists x_\epsilon \in c_{00} \ \|x - x_\epsilon\|_2 < \epsilon$$

Απόδ Τι σημαίνει $x \in \ell^2$;

Σημαίνει $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty$

που σημαίνει, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 : \sum_{n > n_0} |x(n)|^2 < \epsilon^2$

Ονομάζω $x_\epsilon = (x(1), x(2), \dots, x(n_0), 0, 0, \dots)$

$$x - x_\epsilon = (0, 0, \dots, 0, x(n_0+1), \dots$$

$$\|x - x_\epsilon\|_2^2 = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x(k)|^2 < \epsilon^2 \qquad \blacksquare$$

Παρ/δ

$C([a,b])$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$

είναι εσωτ. γινόμενο
διότι αν

$\|f\|_2 = 0$

τότε επειδή
$|f|^2$ συνεχή
και $\int |f|^2 = 0$

έχω $|f(t)|^2 = 0$
$\forall t$
άρα $f=0$

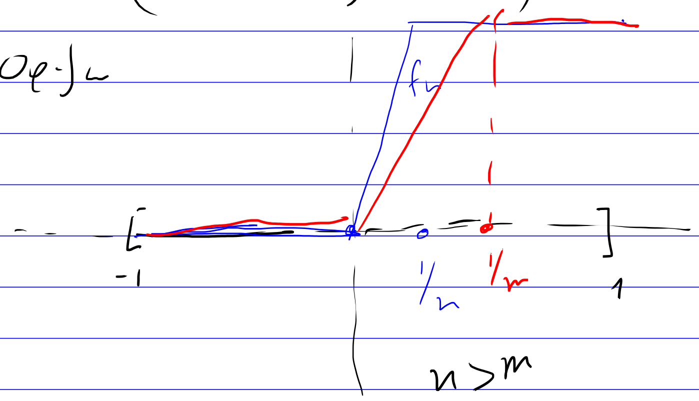
$(C([a,b]), \| \ \|_2)$

όχι πλήρης ως προς

[ενώ $(C([a,b]), \| \ \|_\infty)$
είναι πλήρης (401)
αλλά όχι από εσωτ.
γινόμενο]

Θ.δ.ο. $(C([-1,1]), \|\ \|_2)$ όχι πλήρης (το ίδιο για $\forall [a,b]$)

Ορίζω



$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1\le t<0 \\ nt, & 0\le t\le 1/n \\ 1, & \frac{1}{n} < t \le 1\end{cases}$$

$\forall t$ $\quad |f_n(t)-f_m(t)| \le 1$ και

$\qquad\qquad = 0 \quad t\notin[0,\frac{1}{m}]$

$$\Rightarrow \|f_n-f_m\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n-f_m|^2 = \int_0^{1/m}|f_n-f_m|^2 \le \frac{1}{m}\, 1$$

οπότε $\forall \varepsilon>0$ αν $n>m$ και $\frac{1}{m}<\varepsilon^2$ τότε

$\|f_n-f_m\|_2 < \varepsilon$

Άρα, η (f_n) είναι $\|\ \|_2$-βασική.

Ισχ. ότι $\nexists$ ΣΥΝΕΧΗΣ f ώστε $\|f-f_n\|_2 \to 0$

Έστω ότι $\exists$ τέτοια f:

$$\|f-f_n\|_2^2 = \left(\int_{-1}^{0} + \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1}\right)|f(t)-f_n(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{0}|f(t)|^2 dt + \int_0^{1/n}|f(t)-nt|^2 dt + \int_{1/n}^{1}|f(t)-1|^2 dt \longrightarrow 0$$

όταν $n\to\infty$

$\Downarrow$

$$\int_{-1}^{0}|f|^2 = 0 \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(t)=0 \quad \forall t\in[-1,0]$$

Επίσης $\displaystyle\int_{1/n}^{0}|f(t)-1|^2 dt \le \|f-f_n\|_2^2 \to 0$

άρα

$\forall \epsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$$\int_{1/n}^{1} |f(t)-1|^2 dt < \epsilon$$

$$\sup_{n \geq n_0} \Big(\qquad \Big) \leq \epsilon$$

$$\|$$

$$\int_0^1 |f(t)-1|^2 dt \leq \epsilon$$

Αφού το ϵ ήταν τυχαίο

άρα $\int_0^1 |f(t)-1|^2 dt = 0$

$$\Downarrow$$

$f(t)-1=0 \quad \forall t \in [0,1]$

οπότε $f(t)=0 \quad \forall t \in [-1,0]$
και $f(t)=1 \quad \forall t \in [0,1]$ } δεν γίνεται!

Προσ όμως ότι αν ορίσω

$$g(t)=\begin{cases} 0 & , t \in [-1,0) \\ \text{ότι θέλω} & , t=0 \\ 1 & , t \in (0,1] \end{cases}$$

τότε η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη
και $\|f_n-g\|_2 \longrightarrow 0$

Μήπως πάντα συμβαίνει αυτό; (Άξιο)

Πρότ. $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτ. γιν.
$F \subseteq E$
γραμμ. υπόχ.

$x \in E,\ y \in F$

Τότε:

$$x - y \perp F \iff d(x, F) = \|x - y\|$$

Απόδ. $(\Rightarrow)$ $\forall z \in F$ έχω $z - y \in F$
και $x - y \perp F$

άρα $(x-y) \perp (z-y)$
άρα από Πυθ.!

$$\|x - z\|^2 = \|(x-y) + (y-z)\|^2$$
$$\overset{\perp}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2$$
$$\geq \|x-y\|^2$$

άρα $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$

$(\Leftarrow)$ αν $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| ; z \in F\} = dist(x, F)$
τότε
$\forall z \in F$:
$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ επειδή $y + \lambda z \in F$ έχω

$$\|x - y\| \leq \|x - (y + \lambda z)\|$$

δηλ. $\|x-y\|^2 \leq \langle (x-y) - \lambda z, (x-y) - \lambda z\rangle$
$$\|$$
$$\|x-y\|^2 - 2Re(\langle \lambda z, x-y\rangle) + \|\lambda z\|^2$$
$$\Downarrow$$
$$2Re(\lambda\langle z, x-y\rangle) \leq |\lambda|^2 \|z\|^2$$

Βάζε $\lambda = \frac{1}{n}\overline{\langle z, x-y\rangle}$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2}{n}|\langle z, x-y\rangle|^2 \leq \frac{1}{n^2}|\langle z, x-y\rangle|^2 \|z\|^2$$

αν $\neq 0$

τότε $\frac{2}{n} \leq \frac{1}{n^2}\|z\|^2 \quad \forall n$

: $2n \leq \|z\|^2 \quad \forall n$ άτοπο

άρα ~~βρέχει~~ $x - y \perp z$

<u>Παρατ.</u> Αν H χώρος Hilbert

και M κλειστός υπόχωρος $\neq H$

τότε $\exists\, z \in H$, $z \neq 0$, $z \perp M$

<u>Απόδ.</u> Αφού $M \neq H$ $\quad \exists\, x \notin M$

Ξέρω ότι $\exists\, P_E(x) \in M$

με

$x - P_E(x) \perp M$

Θεώρημα

Επίσης, αφού $x \notin M$,

$x - P_E(x) \neq 0$.

Παίρνω αυτό για z

Η πληρότητα ΔΕΝ μπορεί να παραλειφθεί!

$\exists$ χώρος με εσωτ. γινόμενο E

$\nexists$ γνήσιος κλειστός υπόχωρος $F \subsetneq E$

χωρίς κάθετο διάνυσμα $\neq 0$

<u>Παράδ</u> $E = (c_{00}, \|\ \|_2)$

$$F = \left\{ x = x(n) \ : \ \sum_{n=1}^{n_x} \frac{1}{n} x(n) = 0 \right\}$$

$$\left[\underline{\text{δηλ}} \ \langle x, \left(\tfrac{1}{n}\right) \rangle = 0 \qquad \left(\tfrac{1}{n}\right) \notin c_{00} \right]$$

Προφανώς F γραμμ. υπόχωρος.

Επίσης είναι <u>κλειστός</u> από Cauchy-Schwarz)

<u>Απόδ:</u> αν (x_i) με $x_i \in F$, $\|x_i - x\|_2 \to 0$

Τότε:

$$\left| \sum \frac{1}{n} x(n) \right|$$

$$= \left| \sum \frac{1}{n} \left(x(n) - x_i(n) \right) \right| \quad \forall i$$

$$\left(\text{διότι } \sum \frac{1}{n} x_i(n) = 0 \ \ \forall i \right)$$

$$\overset{CS}{\leq} \left(\sum \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum |x(n) - x_i(n)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \|x - x_i\|_2 \longrightarrow 0$$

<u>Άρα</u> $\sum_n \frac{1}{n} x(n) = 0$ δηλαδή $x = x(n) \in F$.

<u>Ισχ</u> ότι $\nexists\, z \in E$ με $z \perp F$ εκτός από το 0

<u>Απόδ</u> Έστω $z = (z(n)) \perp F$

Παρατηρώ ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ το διάνυσμα

$$= y_n := (1, 0, \dots, -n, 0, \dots) \qquad (-n \text{ στην } n\text{-θέση})$$

$e_1 - n e_n$ ανήκει στον F

διότι: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} y_n(k) = 1 - \frac{1}{n} n = 0$

επομένως θα έπρεπε

δηλ $z \perp y_n$ $\quad \langle z, e_1 - n e_n \rangle = 0$

$$\langle z, e_1 \rangle = n \langle z, e_n \rangle$$

$$z(1) = n\, z(n)$$

$\forall n$ $\quad$ $z(n) = \frac{1}{n} z(1)$

Αλλά, $z \in c_{00}$ οπότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $z(n_0) = 0$

οπότε $\frac{1}{n_0} z(1) = 0$

άρα $z(1) = 0$ άρα $z = 0$

Το ίδιο πρόβλ, αλλά στο ℓ^2 είναι ΟΚ:

Αν $E=\ell^2$

και $F=\{x=x(n)\in\ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x(n)=0\}$

τότε F είναι γν. κλειστός υπόχωρος

και το $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ και $\perp F$

<u>Ορισμός</u> $\emptyset\neq A\subseteq E$ ονομάζω

$$A^{\perp}=\{x\in E : x\perp a \ \forall a\in A\}$$

<u>Πρόταση</u> $A^{\perp}$ είναι πάντα γραμμικός χώρος
μάλιστα κλειστός

<u>Απόδ.</u> $A^{\perp}=\bigcap_{a\in A}\{x\in E : \langle x,a\rangle=0\}$

όπου κάθε $\{x\in E : \langle x,a\rangle=0\}$
είναι υπόχωρος

διότι η $f_a : x\longmapsto\langle x,a\rangle$
είναι γραμμική

και $\{x\in E : \langle x,a\rangle=0\}=\ker f_a$

$A^{\perp}=\bigcap_{a\in A}\ker f_a$

επίσης η f_a είναι ΣΥΝΕΧΗΣ

$|f_a(x)|=|\langle x,a\rangle|\leq\|x\|\,\|a\|$

$x_n\to x$ τότε

$f_a(x_n)\longrightarrow f_a(x)$

οπότε $\forall$ $\ker f_a=f_a^{-1}(\{0\})$: κλειστός

άρα $A^{\perp}$: τομή υποχώρων $\Rightarrow$ υπόχωρος
τομή κλειστών $\Rightarrow$ κλειστό

∎