24 Οκτωβρίου 2017

Σύνθεση:

$$S \circ T : E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$$

γραμμ.

$$ST = S \circ T : E \longrightarrow G \text{ γραμμική}$$

<u>ισχ</u> αν S, T φραγ $\Rightarrow ST$ φραγμ. τελ.

με $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

<u>Αποδ</u> $\forall x \in E$

$$\|ST(x)\|_G = \|S(Tx)\|_G \overset{S \text{ φρ}}{\leq} \|S\| \, \|Tx\|_F$$

$$\overset{T \text{ φρ}}{\leq} \|S\| \left(\|T\| \, \|x\|_E \right)$$

<u>δηλαδή</u>

$$\|ST(x)\|_G \leq \left(\|S\| \cdot \|T\|\right) \|x\|_E \quad \forall x,$$

$$\Rightarrow \|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$$

$\mathcal{H} = \ell^2(n) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ $\{e_i : i = 1 \ldots n\}$ συνηθισμένη βάση

$T \sim [a_{ij}]$: $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$

ορίζω $S \sim [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

$$b_{ij} = \langle Se_j, e_i \rangle$$
$$\shortparallel$$
$$\overline{a_{ji}} \quad \Updownarrow$$

$$a_{ji} = \overline{\langle Se_j, e_i \rangle}$$
$$\shortparallel$$
$$\langle e_i, Se_j \rangle$$

$$a_{ij} = \langle e_j, Se_i \rangle$$

άρα $\langle e_j, Se_i \rangle = \langle Te_j, e_i \rangle \quad \forall i, j = 1 \ldots n$

$$\Downarrow \ (\{e_i\} \text{ βάση})$$

$$\langle x, Sy \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$H = \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ $\qquad a \in \ell^\infty$

δηλ. $a = (a(n))_n$

με $\sup_n |a(n)| := \|a\|_\infty < +\infty$

$$D_a = \mathrm{diag}(a(n))$$

$$D_a e_n = a(n) e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου $(e_n : n \in \mathbb{N})$ η συνήθ.

Ισχυρ. Ο D_a^* ορίζεται και $= D_b$, όπου

$b = (\overline{a(n)})$

Απόδ. (i) $b \in \ell^\infty$ και μάλιστα $\|b\|_\infty = \|a\|_\infty$

άρα

ο D_b ορίζεται και είναι φραγμ.

(ii) $\forall x \in \ell^2$,
$x = (x(n))$

$$D_b x = (b(n)x(n)) = (\overline{a(n)}\, x(n))$$

$$\Rightarrow \langle D_b x, y \rangle = \sum_n \left(\overline{a(n)}\, x(n)\right) \overline{y(n)}$$

$$= \sum_n x(n)\, \overline{a(n) y(n)}$$

$$= \langle x, D_a y \rangle \quad \boxed{///}$$

<u>Παρ/γ</u> $\mathcal{H} = L^2([a,b])$, $f \in C([a,b])$

Έχουμε ορίσει $M_f : L^2 \to L^2$
$g \mapsto fg$
όταν g συνεχής

<u>Ισχ</u> $\exists (M_f)^* = M_h$ όπου $h(t) = \overline{f(t)}$ $\forall t$

<u>Απόδ</u> (ι) Προφ. ότι η $h \in C([a,b])$
άρα ο M_h ορίζεται και ένα
εργ/ση
Θέλω να δείξω

$$\langle M_h \xi, \eta \rangle = \langle \xi, M_f \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in L^2$$

$$\| $$

$$\int_a^b (M_h \xi)(t)\, \overline{\eta(t)}\, dt \quad \text{όταν } \xi, \eta \text{ συνεχείς}$$

$$\| $$

$$\int_a^b h(t)\, \xi(t)\, \overline{\eta(t)}\, dt$$

$$\| $$

$$\int_a^b \overline{f(t)}\, \xi(t)\, \overline{\eta(t)}\, dt$$

$$= \int_a^b \xi(t)\, \overline{f(t)\eta(t)}\, dt$$

$$= \int_a^b \xi(t)\, \overline{(M_f \eta(t))}\, dt$$

$$\langle M_h \xi, \eta \rangle = \langle \xi, M_f \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in C([a,b])$$

$\Downarrow$ (επειδή ο $C[a,b]$ πυκνός στον $L^2[a,b]$ και οι M_f, M_h είναι φραγμένοι)

$$\langle M_h \xi, \eta \rangle = \langle \xi, M_f \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta \in L^2([a,b])$$

<u>Παράδ.</u> Στο $\ell^2(\mathbb{Z})$ ορίζουμε:

$$Ue_n = e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ισχυρ. ότι ο συζυγής του ορίζεται και ικανοποιεί

$$U^* e_n = e_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

<u>Απόδ.</u> <u>Παρατ.</u> ότι $\exists!$, γρ. και φρ. τελ.

$$T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$

τ.ω.

$$Te_n = e_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(τον λέγαμε U^*. Τώρα θα εξηγήσουμε γιατί τον λέγαμε έτσι!)

Έχω: $\forall n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_n, Ue_m \rangle = \langle e_n, e_{m+1} \rangle = \langle e_{n-1}, e_m \rangle$$

(διότι $\delta_{n,m+1}$ και $\delta_{n-1,m}$ είναι ίσα)

άρα

$$\langle e_n, Ue_m \rangle = \langle e_{n-1}, e_m \rangle = \langle Te_n, e_m \rangle \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$\Downarrow$ (διότι U, T γρ. + φραγμ. και $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθ. βάση)

$$\langle x, Uy \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad \forall x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

άρα πράγματι $T = U^*$ ∎

$T: H_1 \to H_2$ γρ + φραγμ

να ορίζω $\varphi_T : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$

$(x,y) \longmapsto \langle Tx, y\rangle$

- $\forall y \in H_2$, η $x \longmapsto \langle Tx, y\rangle : H_1 \to \mathbb{C}$ γραμμική

διότι $x \xrightarrow{\gamma\rho} Tx \xrightarrow{\gamma\rho} \langle Tx, y\rangle$

- $\forall x \in H_1$, η $y \longmapsto \overline{\langle Tx, y\rangle}$

$\overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle$

γραμμ $: H_2 \to \mathbb{C}$

- Είναι φρ, διότι

$|\varphi_T(x,y)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \, \|y\|$

$\leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|$

$\Rightarrow \|\varphi_T\| = \sup\{ |\varphi_T(x,y)| : x \in H_1, y \in H_2\}$

$\leq \|T\|$

από την άλλη,

$\|T\| = \sup\{ \|Tx\| : x \in B_{H_1}\}$

όμως, $\forall z \in H_2 : \|z\| = \sup\{ |\langle z, y\rangle| : y \in B_{H_2}\}$

άρα $\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : x \in B_{H_1}, y \in B_{H_2}\}$

$= \|\varphi_T\|$

transformation

The BLT Theorem:

Linear

Bounded

Κάθε sesquilinear και φραγμένη μορφή

$$\varphi : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

ορίζει μοναδικό $T : H_1 \longrightarrow H_2$ γρ. φραγμ.

ώστε $\varphi(x,y) = \langle Tx, y \rangle \quad \forall x \in H_1$
$\forall y \in H_2$

<u>Απόδ.</u> Έστω $x \in H_1$. Θέλω να βρω $Tx \in H_2$ ώστε

ισοδ.: $\forall y \in H_2 : \langle y, Tx \rangle = \overline{\varphi(x,y)}$

Όμως: η απεικόνιση

$$f : H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$y \longmapsto \overline{\varphi(x,y)}$$

είναι γραμμική
+ είναι και φραγμένη διότι

$$|f(y)| = |\varphi(x,y)| \le \left(\|\varphi\| \, \|x\|\right) \|y\| \quad \forall y \in H_2$$

[διότι εξ ορισμού $|\varphi(\xi,\eta)| \le \|\varphi\| \quad \forall \xi \in B_{H_1}$, $\forall \eta \in B_{H_2}$

οπότε $\forall (x,y) \in H_1 \times H_2$
(εκτός από τετριμμένα)

$$\xi = \frac{x}{\|x\|}, \quad \eta = \frac{y}{\|y\|}$$

$$\left|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \le \|\varphi\|$$

$$\|$$

$$\frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} |\varphi(x,y)| \le \|\varphi\|$$

άρα $|\varphi(x,y)| \le \|\varphi\| \, \|x\| \, \|y\|$
$\forall x \neq 0 \in H_1$
$\forall y \neq 0 \in H_2$
και ισχύει και για
$x = 0$ ή $y = 0$

Σταθ. $x \in H_1$

$$f: H_2 \to \mathbb{C}: y \mapsto \overline{\varphi(x,y)}$$

f γρ. $\quad |f(y)| \le (\|\varphi\| \|x\|) \|y\| \quad \forall y \in H_2$

Όμως: H_2: Hilbert άρα (Riesz)

$\exists!\ \tilde{x} \in H_2$ ώστε

$$f(y) = \langle y, \tilde{x} \rangle \quad \forall y \in H_2$$

δηλ. $\langle y, \tilde{x} \rangle = \overline{\varphi(x,y)}$ δηλ.

δηλ. $\langle \tilde{x}, y \rangle = \varphi(x,y) \quad \forall y \in H_2 \quad (*)$

$\forall x \in H_1$

έχω $\forall x \in H_1\ \exists!\ \tilde{x} \in H_2$ ώστε να ισχύει η $(*)$

ορίζω: $H_1 \to H_2$

$x \mapsto \tilde{x}$

Είναι:

(i) γραμμ.: $x_1, x_2 \in H_1,\ \lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle \widetilde{x_1 + \lambda x_2}, y \rangle = \varphi(x_1 + \lambda x_2, y)$$

$(\varphi(\cdot, y)$ γραμμική$)$

$$= \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y)$$

$$= \langle \tilde{x}_1, y \rangle + \lambda \langle \tilde{x}_2, y \rangle$$

$$= \langle \tilde{x}_1 + \lambda \tilde{x}_2, y \rangle \quad \forall y \in H_2$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{x_1 + \lambda x_2} = \tilde{x}_1 + \lambda \tilde{x}_2$$

(ii) $x \to \tilde{x}$ φρ. διότι

$$\forall y \in H_2: |\langle \tilde{x}, y \rangle| = |\varphi(x,y)|$$

$$\le \|\varphi\| \|x\| \|y\|$$

άρα, παίρνοντας sup ως προς $y \in B_{H_2}$

$$\|\tilde{x}\| = \sup\{|\langle \tilde{x}, y \rangle| : y \in B_{H_2}\}$$

$$\le \|\varphi\| \|x\| \quad \forall x \in H_1$$

άρα $x \to \tilde{x}$ είναι γρ. φρ.

Ορίζω $T: \begin{matrix} H_1 \to H_2 \\ x \to \tilde{x} \end{matrix}$ " " $\|T\| \le \|\varphi\|$ (1)

Έχω

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \varphi(x,y) \quad \forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2$$

Από την άλλη, $\forall x \in B_{H_1},\ \forall y \in B_{H_2}$:

$$|\varphi(x,y)| = |\langle Tx, y \rangle| \le \|Tx\| \|y\|$$

$$\le \|T\| \|x\| \|y\|$$

$$\le \|T\|$$

άρα $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x,y)| : x \in B_{H_1}, y \in B_{H_2}\} \le \|T\|$ (2)

Από (1) και (2) έχω $\|\varphi\| = \|T\|$

Μοναδικότητα: Αν $S: H_1 \to H_2$ ικανοποιεί

$$\forall x, y \quad \langle Sx, y \rangle = \varphi(x,y) = \langle Tx, y \rangle$$

$$\Downarrow\ \forall y \in H_2$$

$$Sx = Tx \quad \forall x \in H_1$$

$$\Downarrow$$

$$S = T \quad \blacksquare$$

Θεώρ. $\forall\, T: H_1 \to H_2$ γρ. φρ.

$\exists!\, T^*: H_2 \to H_1$ " "

ώστε

$$\langle T^* y, x\rangle_1 = \langle y, Tx\rangle_2 \quad \forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2$$

Απόδ. Θεωρώ την $\varphi(y,x) := \langle y, Tx\rangle_2$

Περγρ. γραμμ. ως προς y

αντιγρ. ως προς x (T γραμμ.)

και $|\varphi(y,x)| \leq \|y\| \cdot \|Tx\|$

T φρ.

$\leq \|y\| \cdot \|T\|\, \|x\|$

άρα $\|\varphi\| \leq \|T\|$

οπότε $\exists!\, T^*: H_2 \to H_1$

$$\langle T^* y, x\rangle = \varphi(y,x) = \langle y, Tx\rangle$$

$\forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2$

Αν $\varphi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ sesqui

η $\hat{\varphi} : H \longrightarrow \mathbb{C}$ τετραγωνική

ορίζεται: $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$

$$\hat{\varphi}(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y)$$

$$- \hat{\varphi}(x-y) = \quad = - \text{''} \quad + \text{''} \quad + \text{''} \quad - \text{''}$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y) = 2\varphi(x,y) + 2\varphi(y,x)$$

και $$i\left(\hat{\varphi}(x+iy) - \hat{\varphi}(x-iy)\right) = 2i\varphi(x,iy) + 2i\varphi(iy,x)$$

$$= -2i^2\varphi(x,y) + 2i^2\varphi(y,x)$$

$$= +2\varphi(x,y) - 2\varphi(y,x)$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y) + i\hat{\varphi}(x+iy) - i\hat{\varphi}(x-iy) = 4\varphi(x,y) + 0$$

Polarisation

Πρότ. $T : H \to H$ φραγμ.

ορίζουμε $m(T) = \sup\{ |\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H \}$

Ισχ. T φρ. $\iff m(T) < +\infty$

και μάλιστα

$$m(T) \leq \|T\| \leq 2m(T)$$

Απόδ. Προφ. $m(T) \leq \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : x, y \in B_H \} = \|T\|$

νδο $\|T\| \leq 2m(T)$

Θέτω: $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ και $\hat{\varphi}(x) = \langle Tx, x\rangle$

όπου

$$|\hat{\varphi}(x)| \leq m(T)\|x\|^2$$

Polarisation:

$$4|\varphi(x,y)| \leq |\hat{\varphi}(x+y)| + |\hat{\varphi}(x-y)| + |\hat{\varphi}(x+iy)| + |\hat{\varphi}(x-iy)|$$

$$\leq m(T)\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right]$$

κανόνας //

$$= m(T)\left[2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$|\varphi(x,y)| \leq m(T)\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ όταν $x, y \in B_H$

$$\leq 2m(T)$$

$\Rightarrow$

$$\|T\| = \|\varphi\| \leq 2m(T)$$

Πρότ. Αν $S, T \in B(H)$ ικανοποιούν

$$\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \quad \forall x \in H$$

$\Downarrow$ polarization

$$\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x, y \in H$$

$$\Downarrow$$

$$S = T$$

: **Δεν ισχύει** σε πραγμ. χώρους

πχ $H = (\mathbb{R}^2, \langle\, , \,\rangle)$ T: στροφή κατά $\pi/2$

$$\langle Tx, x\rangle = 0 \quad \forall x$$

Παρ:

$$\sup_{x\in B_H} |\langle Tx,x\rangle| \le \sup_{x,y\in B_H} |\langle Tx,y\rangle| \le 2\sup_{x\in B_H} |\langle Tx,x\rangle|$$

βέλτιστη

Παράδ

$$H=\mathbb{C}^2 \qquad T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

δηλ: $T \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\|T\| = 1$ προφανώς

$$\langle Tx,x\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1\overline{x_2}$$

$$\Rightarrow \sup\{|\langle Tx,x\rangle| : |x_1|^2+|x_2|^2\le 1\}$$

$$= \sup\{|x_1\overline{x_2}| : |x_1|^2+|x_2|^2\le 1\} = \tfrac{1}{2}$$

διότι $2ab \le a^2+b^2$

$T \in B(H)$ λέγεται <u>αυτοσυζυγής</u> όταν $T = T^*$

δηλ όταν $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in H$

<u>Πρόταση</u> Αν T αυτοσυζυγής τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\}$$

<u>Απόδ</u> $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$, $\hat{\varphi}(x) = \langle Tx, x\rangle$

ν.δ.ο $\|T\| \leq \|\hat{\varphi}\|$

<u>Πρώτα</u> $\hat{\varphi}(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x$

διότι $\overline{\hat{\varphi}(x)} = \overline{\langle Tx, x\rangle}$

$= \langle x, Tx\rangle$

$= \langle T^*x, x\rangle$

$= \langle Tx, x\rangle$

Οπότε από τη σχέση

$$4\varphi(x,y) = \hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y) + i\left(\hat{\varphi}(x+iy) - \hat{\varphi}(x-iy)\right)$$

έχουμε

$$4\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,y) = \hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y)$$

$$4|\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \leq |\hat{\varphi}(x+y)| + |\hat{\varphi}(x-y)|$$

$$\leq \|\hat{\varphi}\|\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

(κανόνας $/\!/$)

$$= \|\hat{\varphi}\|\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$$

$\Downarrow$ όταν $x, y \in B_H$

$$|\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \leq \|\hat{\varphi}\|$$

Πάρε $x, y \in B_H$, γράψε: $\varphi(x,y) = |\varphi(x,y)|\, e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

<u>άρα</u> $|\varphi(x,y)| = e^{-i\theta}\varphi(x,y)$

$= \varphi(x, e^{i\theta}y) \in \mathbb{R}$

Έχω

$$|\varphi(x,y)| = \varphi(x, e^{i\theta}y) = \mathrm{Re}\,\varphi(x, e^{i\theta}y) \leq \|\hat{\varphi}\|$$

διότι $e^{i\theta}y \in B_H$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup\{|\varphi(x,y)| : x, y \in B_H\} \leq \|\hat{\varphi}\|$$

∎