19 Οκτ 2017

Παράδ. (συνέχεια) : Τελεστές μετατόπισης

να ορίσω:
$$S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+) \quad (\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\})$$

(α) Θέλω:
$$\underline{S e_n = e_{n+1}} \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

και
$$S^* e_n = \begin{cases} e_{n-1} & , n \geq 1 \\ 0 & , n = 0 \end{cases}$$

(β) Επεκτείνω γραμμικά στο $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$

Αν
$$x = \sum_{k=0}^{n} x(k) e_k = (x(0), x(1), \dots, x(n), 0, \dots)$$
$$S x = \sum_{k=0}^{n} x(k) S e_k$$
$$= \underline{\sum_{k=0}^{n} x(k) e_{k+1}} = (0, x(0), 0, \dots) + (0, 0, x(1), 0, \dots) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x(n), 0, \dots)$$

$n+1$ θέση

$$= (0, x(0), x(1), \dots, \underset{\downarrow}{x(n)}, 0, \dots)$$

<u>Άρα</u>
$$\|Sx\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} |x(k)|^2 = \|x\|_2^2$$

$$S^* x = \sum_{k=0}^{n} x(k) S^* e_k$$
$$= \underset{k=0}{0} + \sum_{k=1}^{n} x(k) e_{k-1}$$
$$= (\underset{0}{x(1)}, \underset{1}{x(2)}, x(3), \dots, \underset{n-1}{x(n)}, 0, \dots)$$

$$\|S^* x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |x(k)|^2 = \|x\|_2^2$$

S^* : συστολή : $\|S^*\| \leq 1$

Τελεστής μετατόπισης στον $L^2(\mathbb{R})$ με "βήμα" ένα $t \in \mathbb{R}$

Ορίζω πρώτα

$$\lambda_t^{\circ} : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$$

με: $(\lambda_t^{\circ} f)(s) = f(s-t)$, $s \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda_t f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda_t^{\circ} f(s)|^2 ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(s-t)|^2 ds$$

(η f μηδενίζεται έξω από κάποιο $[-k, k]$)

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du \quad (u = s-t)$$

$$= \|f\|_2^2$$

λ_t είναι $\|\ \|_2$-ισομετρία

Επίσης, $\lambda_t^{\circ}(C_c(\mathbb{R})) = C_c(\mathbb{R})$

Οπότε, η λ_t° επεκτείνεται σε ισομετρία

$$\lambda_t : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

που είναι <u>επί</u>, διότι

$$\lambda_t(L^2(\mathbb{R})) \supseteq \lambda_t(C_c(\mathbb{R})) \underset{\lambda_t^{\circ}(C_c(\mathbb{R}))}{=}$$

$$\Downarrow$$

$$L^2(\mathbb{R}) \supseteq \underbrace{\lambda_t(L^2(\mathbb{R}))}_{\text{κλειστό (αφού ισομετρία)}} \supseteq \overset{\text{πυκνό}}{C_c(\mathbb{R})}$$

άρα: $=$

[Γενίκευση:

Δράση της $\mathbb{R}$ πάνω στον $\mathbb{R}$:

$$t \longrightarrow \varphi_t : \begin{array}{cc} \mathbb{R} & s \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{R} & s+t \end{array}$$

Γενικότερα, αν X = μετρικός χώρος πλήρως διαχωρίσιμος

και μία δράση της $\mathbb{R}$ στον X

$$\mathbb{R} \curvearrowright X$$

$$\forall t \in \mathbb{R};\ \varphi_t : X \longrightarrow X$$

καλή: ομοιομορφισμός (μπορεί αμφιδιαφορίσιμη).

όπως θέλω

$$\alpha_t : C_c(X) \longrightarrow C_c(X)$$

$$f \longrightarrow \alpha_t f$$

όπου $(\alpha_t f)(s) = f(\varphi_t^{-1}(s))$

$$\varphi_t^{-1}(s) = s - t$$

π.χ. $X = \mathbb{R}^d$

καλά ορισμένη, γραμμική και επί

$t \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha_t(f)\|_2^2 = \int_X |\alpha_t(f)(s)|^2 \, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |(f \circ \varphi_{t^{-1}})(s)|^2 \, ds$$

να δίνω: $\varphi_{t^{-1}}(s) = u$

$$\overset{??}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|^2 J_{\varphi_t^{-1}}(u) \, du$$

↑ πολύ καλή

$$\overset{??}{\leq} M_{J_{\varphi_t^{-1}}} \underbrace{\int |f(u)|^2 \, du}_{\|f\|_2^2}$$]

ΦΡΑΓΜΕΝΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ: ΣΠΑΝΙΟ ΠΡΑΓΜΑ

Πχ Ξεκινάω από τα χώρο

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

[**Παράδ.** $f(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$] απειρόριστα παραγωγίσιμες με συμπαγή φορέα
φχρονζω

Ορίζω: $D : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$f \longmapsto f'$$

γραμμική απεικόνιση

Εξετάζω αν $D : (C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_2) \longrightarrow (C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$ είναι συνεχής

$\exists ?\ M$ ώστε:

$\forall f \in C_c^\infty$,

$$\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$$

Όχι **Πχ** $f_n(t) = t^n \chi_{[0,1]}(t)$ (Sorry)

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n}\, dt = \frac{1}{2n+1}$$

$$\|Df_n\|_2^2 = \int_0^1 |n t^{n-1}|^2\, dt$$

[δεν υπάρχει η Df_n. Τι μπορούμε να κάνουμε;] $\longrightarrow$ Sorry

$$= n^2 \int_0^1 t^{2n-2}\, dt$$

$$= \frac{n^2}{2n-1}$$

$$\left(\frac{\|Df_n\|_2}{\|f_n\|_2}\right)^2 = \frac{n^2}{(2n-1)}(2n+1)$$

$$\frac{\|Df_n\|_2}{\|f_n\|_2} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Δεν υπάρχει M:

τ.ω $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2 \quad \forall f$

Θα έπρεπε $M \geq n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \quad \forall n.$

Άρα, ο D ΔΕΝ είναι $\| \ \|_2$-φραγμ.

άρα **ΔΕΝ** επεκτείνεται σε συνεχή $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

Σχόλιο: Σχέση τελεστή μετατόπισης με τελεστή παραγώγισης:

$$\lambda_t : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$(\lambda_t f)(s) = f(s-t) \quad : \text{ισομετρία}$$

$$D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$f \longmapsto f' \quad : \text{μη φραγμ.}$$

Ισχύει "$\lambda_t = e^{-tD}$"

"Απόδ." Πάρε μια πολύ καλή συνάρτηση f
[π.χ. $f(x) = p(x)e^{-x^2}$, p: πολυώνυμο]

Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Πάρε $x = s-t$, $x_0 = s$

$$\underbrace{f(s-t)}_{\lambda_t f(s)} = f(s) + f'(s)(s-t-s) + \dots + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-t)^n + \dots$$

$$= f(s) + (-t)Df(s) + \frac{(-t)^2}{2!}D^2 f(s) + \dots + \frac{(-t)^n}{n!}D^n f(s) + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} D^k f(s) \quad (\text{αν } \exists \text{ το } \sum_{k=0}^{\infty})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tD)^k}{k!} f(s)$$

"$\lambda_t f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tD)^k}{k!} f = e^{-tD} f$"

"$\lambda_t = e^{-tD} \quad \forall t \in \mathbb{R}$"

(όλα αυτά επιδέχονται αυστηρή αποδείξεις!!)

Ο χώρος των τελεστών

$\{ T : (E, \| \|) \longrightarrow (F, \| \|)$

γραμμικός + φραγμ. $\}$

$\mathcal{B}(E, F) = \{ T : E \to F$ " " $\}$

θυμ. $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in B_E\}$

$< +\infty$

• γραμμικός χώρος με πράξεις κ.σ.

δηλ., αν $T, S \in \mathcal{B}(E, F)$

ορίζω $T+S : x \longrightarrow Tx + Sx$

η $T+S$ προφανώς γραμμική απεικόνιση

$\|T+S\| < +\infty$?

$\forall x \in E$ $\quad \|(T+S)(x)\|_F \overset{\text{ορ}}{=} \|Tx + Sx\|_F$

$\leq \|Tx\|_F + \|Sx\|_F$

$\leq \|T\| \|x\|_E + \|S\| \|x\|_E$

"

δηλ: $\|(T+S)x\|_F \leq (\|T\| + \|S\|) \|x\|_E$

άρα : $T+S \in \mathcal{B}(E, F)$

και μάλιστα

$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$

Επίσης, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, ορίζω

$\lambda T : x \longmapsto \lambda(Tx)$

προφ. γραμμικός + φραγμ.

$\|(\lambda T)x\|_F = |\lambda| \|Tx\|_F \quad \forall x \in E$

$\Rightarrow \|\lambda T\| := \sup\{\|(\lambda T)(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$

$= \sup\{|\lambda| \|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$

$= |\lambda| \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} = |\lambda| \|T\| < +\infty$

οπότε έχουμε

(i) $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$

(ii) $\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$

Ισχ: (iii) $\|T\| = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

πράγματι, ξέρω

$$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \quad \forall x \in E$$

άρα αν $\|T\| = 0$ τότε $Tx = 0 \ \forall x$

δηλ. $T = 0$

και το αντίστροφο είναι προφανές!

ΑΡΑ: $\left(\mathcal{B}(E,F), \| \ \| \right)$ γραμμικός χώρος με νόρμα

<u>Θεώρημα</u> Αν ο $(F, \| \|)$ είναι χώρος Banach (πλήρης)

τότε $(\mathcal{B}(E,F), \| \|)$ είναι πλήρης.

<u>Απόδ</u> Έστω (T_n) στο $\mathcal{B}(E,F)$ βασική:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \quad \|T_n - T_m\| < \varepsilon$

[Θέλω να βρώ $T \in \mathcal{B}(E,F)$ ώστε

$\|T_n - T\| \longrightarrow 0$]

Σταθ. $x \in E$: $(T_n x)$: ακολουθ. στοιχείων του F.

$$\|T_n x - T_m x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|_E$$

$\Longrightarrow (T_n x)$ βασική στην $\| \|_F$

F πλήρης (!!) $\exists \, y \in F$

$= y(x)$

και $\|T_n x - y(x)\|_F \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$y(x) = \lim_n T_n x \qquad \forall x \in E$$

$E \longrightarrow F$ καλά ορισμένη

$x \longrightarrow y(x)$

• $x \longrightarrow y(x)$ γραμμική

διότι είναι (κατά σημείο) όριο γραμμικών απεικονίσεων

Πράγματι: $y(x_1) = \lim_n T_n(x_1)$

$\forall x_1, x_2 \in E$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \lambda y(x_2) = \lim_n \lambda T_n(x_2)$

$$y(x_1) + \lambda y(x_2) = \lim T_n(x_1) + \lim \lambda T_n(x_2)$$

$$= \lim_n \left(T_n(x_1) + \lambda T_n(x_2) \right)$$

$\forall T_n$: γραμμ.

$$= \lim_n \left(T_n(x_1 + \lambda x_2) \right)$$

$$= y(x_1 + \lambda x_2)$$

• $x \longmapsto y(x)$ φραγμ!

$\forall x \in E$ $\quad \|y(x)\| = \|\lim T_n(x)\|$

όμως $\forall$ $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|\,\|x\|$

όμως (T_n) είναι βασική στον $\mathcal{B}(E,F)$

άρα είναι φραγμένη

$\exists M < \infty$: $\quad \|T_n\| \leq M$ $\quad \forall n$

άρα $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|$ $\quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$

οπότε $\|y(x)\| \leq M\|x\|$ $\quad \forall x \in E$

άρα $x \longmapsto y(x)$ είναι γραμμ + φραγμ, οπότε την ονομάζω T!

Μένει νδο $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$

ξέρουμε

$\forall x, \quad \|T_n x - Tx\|_F \longrightarrow 0$

Θυμάμαι ότι: $\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0$

$\|T_n - T_m\| < \epsilon$

οπότε

$\forall x \in E \quad \|T_n x - T_m x\| < \epsilon\|x\|$

Σταθ. $n \geq n_0$ και στέλνω $m \to \infty$:

$\forall x \in E \quad \|T_n x - Tx\| \leq \epsilon\|x\|$

$\sup_{x \in B_E}$

$\forall n \geq n_0$

$\|T_n - T\| = \sup\{\|T_n x - Tx\| : x \in B_E\} \leq \epsilon$

επομένως $T_n \xrightarrow{\|\ \|} T$ $\quad \mathcal{B}(E,F)$ ∎

πχ $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ = τοπολ δυικός του E είναι πλήρης.