17 Οκτ 2017

Ισομορφισμοί:

$(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ διαχ. Τότε $\forall$ επιλογή μιας ΟΚ ακολουθίας $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ ορίζει μια ισομετρία (σελ 1-2)

$$V : \ell^2 \longrightarrow E$$
$$(\lambda_n) \longmapsto \sum \lambda_n x_n \qquad (*)$$

Επιπλέον, αν η $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ΟΚ βάση του E, και ο E είναι πλήρης τότε η V είναι και επί.

$(*)$ καλά ορισμένη, διότι η $\sum_n \lambda_n x_n$ συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_E$.

Παρ. $(C([0,1]), \langle \cdot , \cdot \rangle)$: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

$\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ $\quad f_n(t) = t^n$

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^1 t^{n+m}\,dt$$

ΟΧΙ ορθοκανονική

Είναι όμως γρ. ανεξάρτητη

άρα: Gram-Schmidt:

$\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\} \longrightarrow \{h_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$

γρ. ανεξ. $\qquad$ ορθοκανονική

τ.ω.: $[f_0 \cdots f_n] = [h_0 \cdots h_n] \quad \forall n$

ΕΡΩΤΗΣΗ: $\{h_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ είναι ΟΚ βάση;

$\iff \overline{\text{span}\{h_n : n \in \mathbb{Z}_+\}}^{\|\cdot\|_2} \supseteq C([0,1])$

$(\Leftarrow)$ είναι αλήθεια ότι $\forall f \in C([0,1])$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ p πολυώνυμο : $\|f - p\|_2 < \epsilon$;;

Υπενθύμιση: (401, Κεφ 8) Θ. WEIERSTRASS: $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ p πολυώνυμο $\|f - p\|_\infty < \epsilon$.

$$\Rightarrow \|f - p\|_2^2 = \int_0^1 |f(t) - p(t)|^2\,dt \le \sup |f(t) - p(t)|^2 (1-0) = \|f - p\|_\infty^2 \quad \text{ΟΚ}$$

Άρα ναι, είναι η $\{h_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ ορθοκανονική βάση του χώρου αποτελούμενη από πολυώνυμα.

• Η ορθοκανονική ακολουθία $\{h_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ που προκύπτει από τα $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ με Gram-Schmidt είναι ορθοκανονική βάση του $\left(C([0,1]), \|\ \|_2\right)$

$f_n(t) = t^n$

Επειδή έχουμε ορίσει:

$$L^2([0,1]) = \text{πλήρωση}\left(C([0,1]), \|\cdot\|_2\right)$$

η $\{h_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ είναι ορθοκανονική και στον $L^2([0,1])$

Ισχ. Είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0,1])$

Απόδ. $\forall \varepsilon > 0$ Έστω $g \in L^2([0,1])$

$\exists f \in C([0,1]) : \|g - f\|_2 < \varepsilon/2$

όμως, από τα προηγούμενα

$\exists p$ πολυώνυμο $: \|f - p\|_2 < \varepsilon/2$

$p \in \text{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$

άρα: $\|g - p\|_2 < \varepsilon$

$\blacksquare$

Άλλο παρ/γ $\left(C([-\pi,\pi]), \| \ \|_2\right)$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$$

Συνεχή: $e_n(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt}\,dt$$

$$= 0 \ , \ n \neq m$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} \ \ n = m$$

έχω $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ορθοκανονική
στον $L^2([-\pi,\pi])$

Είναι αυτή ο.κ. βάση του $L^2([-\pi,\pi])$

ΝΑΙ, Θεώρημα Fejér. (605)
ή Θ. Stone-Weierstrass ..

Συνέπεια:

$$L^2([-\pi,\pi]) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$f \longmapsto (\langle f, e_n \rangle)_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι ισομετρία ΕΠΙ

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(t) e^{-int}\,dt$$
$$= \hat{f}(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ΤΕΛΕΣΤΕΣ:

$T:(E,\|\ \|)\longrightarrow(F,\|\ \|)$ γραμμικός.

Έδειξα: συνεχής $\iff \|T\| = \sup\{\|Tx\| : x\in B_E\} < +\infty$

Πρτρ $\forall x\in E$, $x\neq 0$ έχω $\frac{x}{\|x\|}\in B_E$ άρα $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\le \|T\|$

$\overset{\gamma\rho}{\Longrightarrow}$ $\|Tx\|\le\|T\|\,\|x\|$ και ισχύει και για $x=0$

(ακόμα κι αν $\|T\|=+\infty$)

όμοια αν $x,y\in E$ έχω

$$\|Tx-Ty\| = \|T(x-y)\|\le\|T\|\,\|x-y\|$$

άρα, αν $\|T\|<+\infty$, η T είναι (ομοιόμορφα) συνεχής
άρα συνεχής στο 0

- Αντίστροφα, αν $\|T\|=+\infty$, θα δείξω η T δεν είναι συνεχής στο 0

Πράγματι, $\forall n$, αφού $\sup\{\|Tx\| : x\in B_E\} > n$
$\exists\, x_n\in B_E$ με
$$\|Tx_n\|>n$$
οπότε
$$\left\|T\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\|>1$$

όμως, αν $y_n := \frac{x_n}{n}$ έχω $\|y_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \le \frac{1}{n}$

άρα $y_n\longrightarrow 0$ ενώ $Ty_n\not\longrightarrow 0$ ∎

Συμπέρασμα:

T συνεχής στο 0 $\Longrightarrow$ $\|T\|<+\infty$

$$\Downarrow$$

$\forall x,y$: $\|Tx-Ty\|\le\|T\|\,\|x-y\|$

$$\Downarrow$$

T ομοιόμορφα συνεχής.

ΠΡΑΓ

$$[a_{ik}] \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow T: E \longrightarrow F$$

$$\begin{array}{ccc} E & & F \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{C}^m & & \mathbb{C}^n \\ \{e_1 \dots e_m\} & & \{f_1 \dots f_n\} \end{array}$$

ον $\longrightarrow \{f_1 \dots f_n\}$

$\forall k = 1 \dots m$

θέτω $T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} f_i$

Επεκτείνω γραμμικά

Δηλ: $\forall x \in E : x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$

θέτω $Tx = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle Te_k$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \langle x, e_k \rangle f_i$$

Πέρνω $\langle \cdot, f_j \rangle$: $\langle Tx, f_j \rangle = \sum_{k,i} a_{ik} \langle x, e_k \rangle \underbrace{\langle f_i, f_j \rangle}_{\delta_{ij}}$

$$\Rightarrow \langle Tx, f_j \rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} \langle x, e_k \rangle$$

με άλλα λόγια

$$Tx = \begin{bmatrix} \langle Tx, f_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tx, f_n \rangle \end{bmatrix} = [a_{ik}] \begin{bmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_m \rangle \end{bmatrix}$$

Προβλ:

$\forall\, T: \ell^2 \to \ell^2$ γραμμική

ορίζω: $[a_{ik}] = [\langle Te_k, e_i\rangle] : i,k \in \mathbb{N}$

$\infty \times \infty$ πίνακας

Σταθ. k, $(\langle Te_k, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ πρέπει $\in \ell^2$

δηλ $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_i\rangle|^2 < +\infty$

Άρα, δεν ορίζει $\forall$ πίνακας $[a_{ik}]$ έναν τελεστή.

πχ $[a_{ik}] = 1$ $\forall i\ \forall k$ δεν δουλεύει.

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ:

Weierstrass: $\forall f \in C([0,1])$ $\exists (p_n)$ πολυώνυμα

$$\|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0$$

$$\Downarrow$$

$$\|f - p_n\|_2 \longrightarrow 0$$

άρα, $\exists$ μια ON βάση του $L^2([0,1])$ από πολυώνυμα $\{h_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$

$\forall f \in L^2([0,1])$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n\rangle h_n$$

(σύγκλιση ως προς $\| \ \|_2$)

όπως $\forall f \in C([0,1])$ αν θέσω

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f, h_k\rangle h_k$$

: πολυώνυμο

$$\|f - q_n\|_2 \longrightarrow 0$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 f(t) \overline{h_k(t)}\, dt \right) h_k$$

ΚΛΕΙΝΕΙ Η ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ.

ΠΡΑΓ: Διαγώνιοι τελεστές

Μου δίνουν (a_n) : $a_n \in \mathbb{C}$

Θέλω να ορίσω $T: \ell^2 \to \ell^2$

με πίνακα $\operatorname{diag}(a_n)$

$$\shortparallel$$

δηλ:
$$\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

Δεν γίνεται πάντα.

Πχ $a_n = n \ \forall n$

τότε, ενώ $x = \left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^2$

το $(a_n x(n)) = (1, 1, 1, \dots) \notin \ell^2$

Θέλω συνθήκη στην (a_n) ώστε $T = D_a$ να στέλνει τα ℓ^2 μέσα στο ℓ^2

Πρέπει και αρκεί $\forall x = (x(n)) \in \ell^2$ να ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x(n)|^2 < +\infty$$

Αρκεί η $a = (a(n))$ να είναι φραγμένη διότι τότε:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n x(n)|^2 \le \sup |a_n|^2 \sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2$$

$\forall N$
$$\le \|a\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x(n)|^2 \le \|a\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty$$

Άρα
ο D_a ορίζεται και μάλιστα

$$\|D_a x\|_2 \le \|a\|_\infty \|x\|_2 \quad \forall x \in \ell^2$$

είναι και φραγμένος τελεστής.

Αντίστροφα, <u>αν</u> ο D_a είναι (καλά ορισμένος και) φρ. τελεστής

τότε η $(a(n))$ είναι φραγμένη.

Διότι αν δεν είναι, θα $\exists$ (a_{k_n}) υπακ.

με $|a_{k_n}| > n$ $\forall n$

$$\left(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\right) \qquad |\ | > 1 \qquad |\ | > 2$$

Τώρα ορίζω $x \in \ell^2$ ως εξής:

$$x(k_n) = \frac{1}{n} \quad \forall n$$

και $x(m) = 0$ αν $m \notin \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x(m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(k_n)|^2 < +\infty$$

όμως

$(a_m x(m))_{m=1}^{\infty}$ δεν ανήκει στον ℓ^2

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m x(m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n} x(k_n)|^2$$

$$> 1 + 1 + 1 + 1 \dots$$

Δείξαμε ότι, όχι μόνο ο D_a δεν είναι φραγμένος τελεστής, αλλά δεν ορίζεται <u>καν</u> σε όλον τον ℓ^2. Δηλαδή:

Δείξαμε:

Ενδιαφέρουσα άσκηση:

Αν $\forall (x(n))$ του ℓ^2

η $(a_n x(n))$ είναι στον ℓ^2

τότε αυτομάτως η (a_n) είναι φραγμ.

(οπότε ο D_a είναι φραγμένος τελεστής)

Με άλλα λόγια, ο D_a, αν ορίζεται παντού στον ℓ^2, αυτομάτως είναι φραγμένος τελεστής.

ΠΡΑΓ   Ιδιοί τελεστές:

Έστω $\varphi : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής

οπότε, $\forall f \in C[a,b]$ $\forall x \in [a,b]$

η $y \longmapsto \varphi(x,y) f(y)$ συνεχής

άρα $\exists$ το $\int_a^b \varphi(x,y) f(y) dy := (Kf)(x)$

Άσκ   η $Kf : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση

Έχω ορίσει

$K : f \longmapsto Kf : C[a,b] \to C[a,b]$

προφανώς γραμμική

Θέλω να ορίσω τελεστή $L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$

$\Longleftrightarrow$ νδο $\exists$ σταθερά $\|\varphi\|_{22}$ ώστε

$\forall f \in C[a,b] : \|Kf\|_2 \le \|\varphi\|_{22} \|f\|_2$

τότε θα έχω δείξει: Κ φρ. τελεστής
και η $\|K\| \le \|\varphi\|_{22}$

οπότε θα δέχεται μοναδική επέκταση
σε φρ. τελεστή $L^2 \longrightarrow L^2$
με την ίδια νόρμα.

[illegible]: $\exists M: \ \|Kf\|_2^2 \le M^2 \|f\|_2^2 \quad \forall f \in C[a,b]$

$$\|Kf\|_2^2 = \int_a^b |Kf(x)|^2 \, dx = \int_a^b \Big| \underbrace{\int_a^b \varphi(x,y) f(y) \, dy}_{} \Big|^2 dx$$

[illegible]

$$\left| \int_a^b \varphi(x,y) f(y) \, dy \right|^2 \overset{CS}{\le} \int_a^b |\varphi(x,y)|^2 \, dy \ \underbrace{\int_a^b |f(y)|^2 \, dy}_{\|f\|_2^2}$$

[illegible]:

$$\|Kf\|_2^2 = \int_a^b \left| \int_a^b |\varphi(x,y) f(y)| \, dy \right|^2 dx$$

$$\le \int_a^b \left(\int_a^b |\varphi(x,y)|^2 \, dy \right) \|f\|_2^2 \, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b \left(\int_a^b |\varphi(x,y)|^2 \, dy \right) dx}_{\|\varphi\|_{22}^2} \ \|f\|_2^2$$

Τελεστές Hilbert-Schmidt. Έστω $[a_{ik}]$ άπειρος πίνακας

Θέτω: $(Tx)(i) = \sum_k a_{ik} x(k)$ (αν $\exists$ το $\sum_k$) (*)

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_i |(Tx)(i)|^2$$

$$= \sum_i \left| \sum_k a_{ik} x(k) \right|^2$$

$$\overset{CS}{\leq} \sum_i \Big(\sum_k |a_{ik}|^2 \underbrace{\sum_k |x(k)|^2}_{\|x\|_2^2} \Big)$$

$\|$ (άρα η σειρά (*) συγκλίνει απολ.)

$$\Big(\sum_i \sum_k |a_{ik}|^2 \Big) \|x\|_2^2$$

όπου T είναι φραγμ. και

$$\|T\|^2 \leq \sum_{i,k} |a_{ik}|^2$$

$\leq$ είναι γνήσια σχέση

πχ αν $a_{ik} = \begin{cases} b_k & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$

τότε, όπως έχουμε δει

$$\|T\| = \sup_k |b_k| = \sup_k |a_{kk}|$$

$$<< \Big(\sum_k |a_{kk}|^2 \Big)^{1/2}$$

Πολλ/κοί Τελεστές :

$$M_f^0(g) = fg \quad , g \in C([a,b])$$

$$\|M_f^0(g)\|_2^2 = \int_a^b |f(x)g(x)|^2 dx$$

$$\le \sup|f|^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

$$\Downarrow$$

$$\|M_f^0(g)\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$$

άρα ο M_f^0 είναι $\|\ \|_2 - \|\ \|_2$ συνεχής

οπότε επεκτείνεται μοναδικά σε :

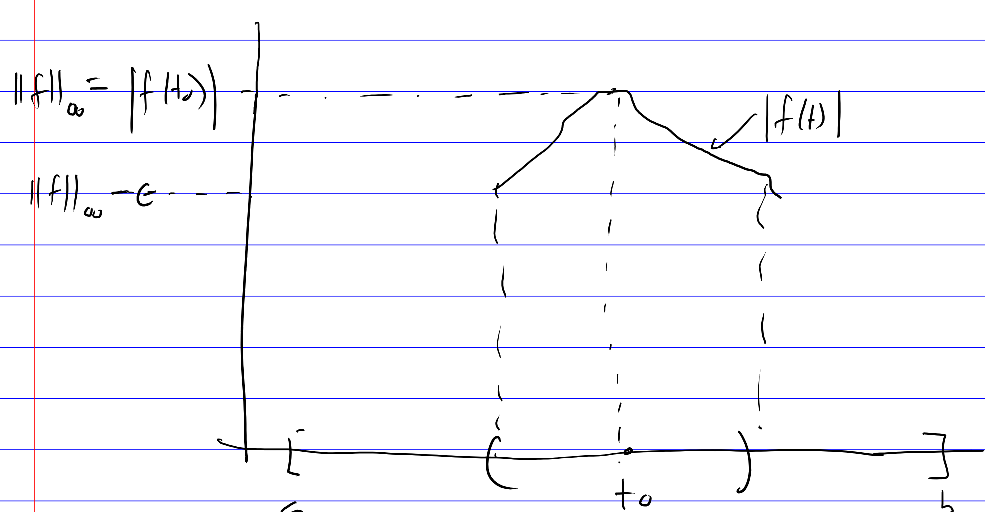
$$M_f : L^2 \longrightarrow L^2$$

με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$:

<u>Ισχ</u> $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

<u>Απόδ</u> f συνεχής : $\exists\, t_0 \in [a,b] : |f(t_0)| = \|f\|_\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, J \subseteq [a,b]$ γύρω από το t_0 ώστε
$\forall t \in J \quad |f(t)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$



$$M_f(g) = fg$$

$$\|M_f(g)\|_2^2 = \int |fg|^2$$

Θέτω: $g = \chi_J$ (δεν είναι συνεχής, είναι όμως R-ολοκληρώσιμη)

$$\|M_f(g)\|_2^2 = \int |f\chi_J|^2$$

$$= \int_J |f|^2 \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 m(J)$$

$$= (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 \int |\chi_J|^2$$

$$\underbrace{\|f\|_\infty \|\chi_J\|_2} \geq \|M_f(\chi_J)\|_2 \geq \underbrace{(\|f\|_\infty - \epsilon)\|\chi_J\|}$$

άρα $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

διότι

$$\|M_f\| = \sup\left\{ \frac{\|M_f(g)\|_2}{\|g\|_2} : \forall g \in, \neq 0 \right\} \geq \|f\|_\infty - \epsilon$$

ή απλούστερα:

$$\|f\|_\infty \|\chi_J\|_2 \overset{\text{είδαμε πριν}}{\geq} \|M_f\| \|\chi_J\|_2 \overset{\text{ορισμός } \|M_f\|}{\geq} \|M_f(\chi_J)\|_2 \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)\|\chi_J\|_2$$

$\Downarrow$ αφού $\|\chi_J\|_2 \neq 0$

$$\|f\|_\infty \geq \|M_f\| \geq \|f\|_\infty - \epsilon$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχαίο.

$\blacksquare$