30 Νοεμ 2017

Θεώρημα: H: Hilbert, $\dim H < \infty$

$T \in \mathcal{B}(H)$ γνήσιος ώστε $T^*T = TT^*$

τότε

οι ιδιόχωροι του $M_\lambda = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$

είναι ($\perp$) ανά δύο

και παράγουν τον H: $\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} M_\lambda = H$

($\sigma_p(T)$ = σύνολο ιδιοτιμών του T, $\neq \emptyset$, πεπερασμένο)

Προφανώς: $T|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$

αν $P_\lambda = P(M_\lambda)$

- $\{P_\lambda : \lambda \in \sigma_p(T)\}$ $\perp$ ανά 2
- $\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} P_\lambda = I$ $(\ast)$

$\forall x \in H$: $T(P_\lambda x) = \lambda(P_\lambda x)$: $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$

άρα $T = T\left(\sum_\lambda P_\lambda\right) = \sum_\lambda TP_\lambda = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$

δηλαδή $\sum P_\lambda = I$, $\sum \lambda P_\lambda = T$

$$T = \sum \lambda P_\lambda$$ φασματική ανάλυση του T

Αν H απειροδιάστατος διαχ., T γνήσιος + συμπαγής:

άλλο: $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_{\lambda_i}$ (λ_i: οι ιδιοτιμές του)

Γενικότερα: « H απειρ., $T = T^* \in \mathcal{B}(H)$

$$T = \int \lambda \, dE_\lambda$$ »

Για τα επόμενα, δες καλύτερα το αρχείο

nnspecth.pdf

στην e-class!

$A \in \mathcal{B}(E)$ E: χώρος Banach

$\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|A\|$

τότε ο $(A - \lambda I)$ έχει φρ αντίστροφο

Αρκεί Αρκεί νδο $\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$ " " "

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$$

$n > m$

τότε $\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \right\|$

$$\leq \sum_k \left\| \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k \right\| \leq \sum_k \left\| \frac{A}{\lambda} \right\|^k$$

γριθτης $\in (0,1)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $\forall n > m \geq n_0$

$$\sum_k \left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^k < \varepsilon$$

Επόμενως η (S_n) είναι βασική, και ο $\mathcal{B}(E)$ είναι πλήρης

$\exists S \in \mathcal{B}(E)$: $\|S_n - S\| \to 0$

$$S_n = I + T + \dots + T^n$$

$$+ \quad TS_n = T + T^2 + \dots + T^{n+1}$$

$$TS_n - S_n = T^{n+1} - I$$

$\Rightarrow TS - S = \lim_n T^{n+1} - I$

Όμως: $\|T\| < 1$ άρα $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1} \to 0$

$= -I$

Ομοίως

$ST - S = -I$

δηλαδή

$(I - T)S = (T - I)S = I$

δηλ

$$S = (I - T)^{-1} = \left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda(\lambda I - A)^{-1}$$

άρα, αν $|\lambda| > \|A\|$: $(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} S = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$

$A \in \mathcal{B}(H)$, $AA^* = A^*A$

$\lambda \notin \sigma_a(A)$ νδο $T := A - \lambda I$ έχει φρ. αντίστρ.

- $\lambda \notin \sigma_p(A) \Rightarrow T$ είναι 1-1

- $T(H)$ πυκνό : Απόδ. Αν $y \perp T(H)$

  τότε $\forall x \in H$ $\langle y, Tx \rangle = 0$

  δηλ. $\langle T^* y, x \rangle = 0$ $\forall x$

  άρα $T^* y = 0$

  T φυσιολ. : $\|Ty\| = \|T^* y\| = 0$

  άρα $Ty = 0 \overset{T\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} y = 0$

$H \twoheadrightarrow T(H)$: $\exists S : T(H) \twoheadrightarrow H$

$S(Tx) = x \quad \forall x \in H$

Ισχ. S είναι φραγμ.

Απόδ. Ξέρω ότι $\exists \delta > 0$: $\|Ax - \lambda x\| \geq \delta \|x\|$ $\forall x$

$\|Tx\| \geq \delta \|x\|$

$\|x\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx\|$

άρα

$\forall y \in T(H)$ με $y = Tx$ $\quad Sy = x$

$\|Sy\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx\| = \frac{1}{\delta} \|y\|$

άρα S φραγμ. $\|S\| \leq \frac{1}{\delta}$

άρα ο S επεκτείνεται σε φραγμ. τελ. $\tilde{S} : \overline{T(H)} = H \to H$

και ικανοποιεί $\tilde{S}(Tx) = STx = x$ $\forall x \in H$

$T(\tilde{S} x) = x$ $\forall x \in H$

דוגמא $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{0\}$

$\|A\| = 1$

אבל, אם $A = A^*$ אזי גם $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$

טענה: אם $A = A^*$ אזי $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

(ואפילו $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$)

הוכחה: יהי $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

אזי $\forall x \in H,\ x \neq 0$:

$$0 < |\lambda - \bar{\lambda}|\,\|x\|^2 = \left|\langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle (A-\bar{\lambda} I)x, x\rangle\right|$$

$$= \left|\langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A-\lambda I)x\rangle\right|$$

$$\leq \left|\langle (A-\lambda I)x, x\rangle\right| + \left|\langle x, (A-\lambda I)x\rangle\right|$$

$$\leq 2\|(A-\lambda I)x\|\,\|x\|$$

$$\Rightarrow \|(A-\lambda I)x\| \geq \underbrace{\frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2}}_{\delta}\|x\|$$

$\Rightarrow \lambda \notin \sigma_a(A)$ (כיוון ש-A צמודה)

$\lambda \notin \sigma(A)$

$(A = A^*$

τότε $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$

Ισχ. $\|A\| = \sup\{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\| \le 1\}$

(γνωστό: $\|A\| = \sup\{|\langle Ax,y\rangle| : x,y \in B_H\}$

$= \sup\{\varphi_A(x,y) : \quad " \quad " \quad)$

τότε $= \sup\{\underbrace{\hat{\varphi}(x) : x \in B_H}\} = \|\hat{\varphi}\|$

$\hat{\varphi}(x) = \langle Ax, x\rangle$

Αφού $A = A^*$: $\hat{\varphi}(x) \in \mathbb{R} \ \forall x$

άρα

$$4\langle Ax,y\rangle = \underbrace{\hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y)}_{= \mathrm{Re}\,4\langle Ax,y\rangle} + i\hat{\varphi}(x+iy) - i\hat{\varphi}(x-iy)$$

$$\Rightarrow |4\,\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle| \le |\hat{\varphi}(x+y)| + |\hat{\varphi}(x-y)|$$

$$\le \|\hat{\varphi}\| \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

$$\|$$

$$\|\hat{\varphi}\| \left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right) \le 4\|\hat{\varphi}\|$$

άρα $\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle \le \|\hat{\varphi}\|$ $\quad \forall x,y \in B_H$

$\Downarrow$

$|\langle Ax,y\rangle| \le \|\hat{\varphi}\|$

(αντικαθιστώντας y με $y e^{i\theta} = y'$ ώστε $|\langle Ax,y\rangle| = \mathrm{Re}\langle Ax,y'\rangle$)

$\Downarrow$

άρα $\|A\| \le \|\hat{\varphi}\|$ ▨

$\|A\| = \sup\{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\| = 1\}$

υπάρχει $\exists (x_n)$, $\|x_n\| = 1$ τ.ω. $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to \|A\|$

$(\langle Ax_n, x_n\rangle)$ φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$

Έχει άρα υπακολουθία συγκλίνουσα

$\langle Ay_n, y_n\rangle$ ~~υπ~~ έστω $\lambda = \lim_n \langle Ay_n, y_n\rangle$

Ισχ. $\lambda \in \sigma_a(A)$

Απόδειξη:

$$\|Ay_n - \lambda y_n\|^2 = \langle Ay_n, Ay_n\rangle - \langle Ay_n, \lambda y_n\rangle - \langle \lambda y_n, Ay_n\rangle + \langle \lambda y_n, \lambda y_n\rangle$$

$$= \|Ay_n\|^2 - 2\lambda \underbrace{\langle Ay_n, y_n\rangle}_{\to \lambda} + \lambda^2 \underbrace{\|y_n\|^2}_{=1}$$

$$\le \|A\|^2 - 2\lambda \underbrace{\langle Ay_n, y_n\rangle}_{\to \lambda} + \lambda^2 \to 0$$

και $|\lambda| = \|A\|$

Αν A συμπ + φυσιολ και αν $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$
τότε $\lambda \in \sigma_p(A)$

<u>Απόδ</u> $\lambda \in \sigma(A)$ και A φυσιολ $\exists$ ξέρω $\lambda \in \sigma_a(A)$
οπότε $\exists\ y_n$: $\|y_n\| = 1$ ώστε $\cancel{\langle A y_n, y_n \rangle \to \lambda}$
$\|(A - \lambda I) y_n\| \to 0$

<u>όμως</u> A συμπ, (y_n) φραγ $\Rightarrow$ (Ay_n) έχει
υπακολ, έστω (Az_n) που συγκλίνει
συγκεκρ. $w = \lim A z_n$
και ισχ $Aw = \lambda w$

<u>Απόδ</u>
$\lim_n (Az_n - \lambda z_n) = 0$ και $\lim_n (Az_n - w) = 0$
$\Downarrow$
$\lim \lambda z_n = w$
$\Downarrow$ A φραγ
$\lim (A \lambda z_n) = Aw$
$\|$
$\lambda \lim A z_n$
$\|$
λw

Προσπαθούμε $w \neq 0$
Ξέρω $w = \lim \lambda z_n = \lambda \lim z_n$
$\neq 0$
$(\lambda \neq 0)$, $\|z_n\| = 1$

<u>Παρατ</u> Αν $T \in \mathcal{K}(H)$ σε $\dim H = \infty$
τότε $0 \in \sigma(T)$
Αλλιώς ο T^{-1} θα ήταν φραγ
οπότε $T^{-1}T$ θα ήταν συμπ
όμως $\|$
$I \in \mathcal{K}(H)$ δεν γίνεται
στο $\dim H = \infty$

Όμως, $\exists\ T \in \mathcal{K}(H)$ που είναι 1-1
πχ. $T = D_a$ όπου $a(n) \neq 0\ \forall n$
και $a \in c_0$

<u>Πόρισμα</u> Αν $A = A^*$ και συμπαγής, τότε
$\exists\ \lambda \in \sigma_p(A)$ με $\|A\| = |\lambda|$
(οπότε $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$
$= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$)

<u>Απόδ</u> Αφού $A = A^*$ έχουμε δείξει ότι $\exists\ \lambda \in \sigma_a(A)$
ώστε $|\lambda| = \|A\|$
Αλλά τότε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ οπότε $\lambda \in \sigma_p(A)$ ∎

$A = A^* \in \mathcal{B}(H)$, $\quad \sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$

και επιπλέον

$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$

(1) $A \in \mathcal{K}(H)$, $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ Ισχ. M_λ πεπερασμενοδιάστατο

Απόδ : $A\big|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$ άρα $I_{M_\lambda} = \frac{1}{\lambda} A\big|_{M_\lambda}$

είναι συμπαγής

άρα $\dim M_\lambda < \infty$

(2) $A \in \mathcal{K}(H)$, $\{x_n\}$ ορθ. ακολουθία και $\forall n \ \exists \lambda_n \in \mathbb{C}$

και $Ax_n = \lambda_n x_n$ τότε $\lambda_n \to 0$

Απόδ $\langle Ax_n, x_n \rangle = \lambda_n \langle x_n, x_n \rangle = \lambda_n$

$\downarrow$ διότι A συμπαγής

0

(3) A συμπαγής + αυτοσυζυγής, τότε $\sigma_p(A)$ είναι ή πεπερασμένο ή αποτελεί μηδενική ακολουθία

Απόδ Αν $\sigma_p(A)$ είναι άπειρο και όχι μηδεν. ακολουθία

τότε $\exists d > 0$, και $\exists$ άπειρα $\lambda_n \in \sigma_p(A)$

με $|\lambda_n| \geq d$

Μπορώ να υποθέσω $\lambda_n \neq \lambda_m$

$\forall n$, $\exists x_n$ με $\|x_n\| = 1$ και $Ax_n = \lambda_n x_n$

Αλλά A φυσιολ. $\Rightarrow$ οι διαφορετικοί ιδιόχωροι είναι $\perp$

άρα (x_n) είναι ορθοκανονική

άρα από το (2) : $\lambda_n \to 0$ #