28/11/2017

$A : E \to E$ γραμμ.

$\lambda \in \mathbb{C}$:

$$M_\lambda = \{x \in E : Ax = \lambda x\}$$
$$= \ker(A - \lambda I)$$

Αν $B : E \to E$ γραμμ. με $BA = AB$

τότε $B(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

Δείτε

$\forall x \in M_\lambda$ έχω $Bx \in M_\lambda = \ker(A - \lambda I)$

δηλαδή:

$$(A - \lambda I)(Bx) = 0$$

Πράγματι:

$$(A - \lambda I)Bx = B\underbrace{(A - \lambda I)x}_{=0} = 0$$

Συμβ.: $\{A\}' = \{B : E \to E : AB = BA\}$

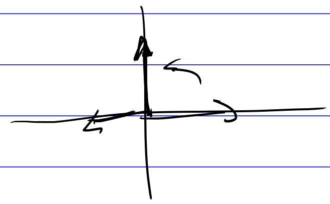
είναι άλγεβρα με $I_E \in \{A\}'$.

Αν

$E=\mathbb{R}^2$, $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: $A=\begin{bmatrix}0&-1\\+1&0\end{bmatrix}$

δεν έχει (πραγμ.) ιδιοτιμές

$\Rightarrow$ δεν έχει γν. αναλλ. υποχώρους



Όμως, αν $E=\mathbb{C}^2$: $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$: $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

πχ το $u=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ είναι

ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $(-i) = e^{-i\pi/2}$

οπότε ο span$\{u\}$

είναι γνήσιος αναλλ. υποχ.

Παρδγ

$T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$T: (x(1), x(2), x(3), \dots) \longrightarrow (0, x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots)$

$T: (x(1), x(2), x(3), \dots) \xrightarrow{S} (0, x(1), x(2), x(3), \dots)$

$\downarrow D_a$

$(0, \frac{x(1)}{1}, \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots)$

D_a διαγώνιος $a(\nu) = \frac{1}{n-1}$, $n \geq 2$

$a(1) = ie^{\ell cs 3}$

$T = D_a \circ S$

↑ επειδή $a(\nu) \to 0$ ο D_a είναι συμπαγής

$\Downarrow$

T συμπαγής

Τι θα πει $Tx = \lambda x$:

$(0, x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots)$

$\parallel$

$(x(1), \lambda x(2), \lambda x(3), \lambda x(4), \dots)$

$\Downarrow$

$x(1) = 0$ $\Rightarrow$ $x(1) = 0$ $\Rightarrow$ Αν $\lambda \neq 0$ τότε

$\lambda x(2) = x(1)$ $\quad$ $\lambda x(2) = 0$ $\quad$ $\forall\, x(n) = 0$

$\lambda x(3) = \frac{x(2)}{2}$ $\quad$ $\lambda x(3) = \frac{x(2)}{2}$

$\lambda x(4) = \frac{x(3)}{3}$

$\vdots$

Αν $\lambda = 0$ πάλι κάθε $\frac{x(n)}{n} = 0 \Rightarrow x(n$

Τ: συμπαγής, χωρίς ιδιοτιμές

$T = D_a \circ S$: $T^* = S^* \circ D_a^* = S^* D_a$ αυτός έχει ιδιοτιμές (άσκ.)

Παρ/γ Έστω $L^2([0,1])$

$A: \quad (Af)(t) = tf(t), \quad f\in C([0,1])$

έχουμε δείξει ότι επεκτείνεται σε φρ. και αυτοσυζυγή τελεστή

$\exists ?\ \lambda\in\mathbb{C}$ $\exists ?\ f\neq 0$ στον L^2: $(A-\lambda I)f=0$

δηλ $(t-\lambda)f(t)=0$

! αν f συνεχής : $\forall t\in[0,1]$

$\Downarrow$

$f(t)=0 \quad \forall t\neq\lambda$

$\Downarrow$

$f(t)=0 \quad \forall t\in[0,1]$

όχι ιδιοδιάνυσμα

Πχ πάρε $\lambda=0$ θέλω $f\neq 0$ / $Af=0$

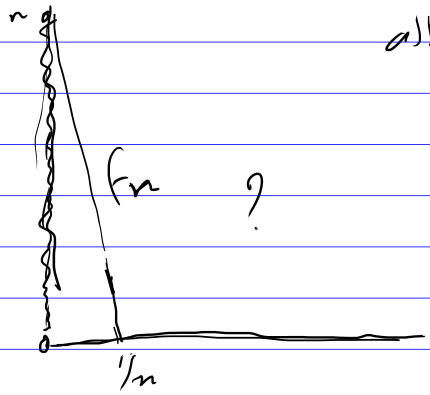
δηλ $tf(t)=0$

πρέπει $f(t)=0 \quad \forall t\neq 0$

αλλά πρέπει $\|f\|_2\neq 0$

δηλαδή

$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\neq 0$$



υποχρεωτικά : $f=$ "δ_0"

δεν είναι συνάρτηση!

Μήπως $\exists (f_n)$ με $Af_n\to 0$;;

Απάντηση Θ. Μέτρου: Αν $f\in L^2$ ικανοποιεί $(A-\lambda)f=0$

αυτό σημαίνει

$(t-\lambda)f(t)=0$

σχεδόν $\forall t$

(Εννοείται το μέτρο Lebesgue!)

όμως, αφού $\{\lambda\}$ έχει μέτρο μηδέν

$\Downarrow$

$f(t)=0$ σχεδόν $\forall t$

δηλ. $\|f\|_2=\int|f|^2=0$ ∎

Άσκ Να δειχθεί ότι $\sigma_p(A)=\emptyset$

και να δειχθεί ότι $\forall\lambda\in[0,1]$ είναι

προσεγγιστική ιδιοτιμή του A

δηλ $\exists (f_n)$ στο L^2 με $\|f_n\|_2=1$

και $\|(A-\lambda)f_n\|_2\to 0$

H: διαχωρίσιμος, $A \in \mathcal{B}(H)$

λέγεται <u>διαγωνοποιήσιμος</u> αν $\exists$ ON <u>βάση</u>

(x_n) του H από ιδιοδιανύσματα του A:

$$\forall n \quad \exists\, a(n) \in \mathbb{C} : \quad A x_n = a(n)\, x_n$$

ισοδύναμα:

ισομετρία και επί

$$\begin{tikzcd} x_n \arrow[d, mapsto] & H \arrow[r, "A"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \arrow[d, "U"] & a(n)x_n \\ e_n & \ell^2 \arrow[r, "D_a"'] & \ell^2 & a(n)e_n \end{tikzcd}$$

$$A = U^{-1} D_a U$$

$$A \simeq D_a$$

↑ unitary ισοδυναμία

<u>Παρ</u> Ξέρω ότι $\forall\, D_a$ είναι φυσιολογικός

διότι $D_a^* = D_{\bar{a}}$

άρα $D_a^* D_a = D_{\bar{a}a} = D_{a\bar{a}} = D_a D_a^*$

όμως:

$$A^*A = (U^{-1}D_aU)^*(U^{-1}D_aU) \qquad (\text{θυμίζω ότι } U^* = U^{-1})$$

$$= (U^*D_aU)^*(U^*D_aU)$$

$$= (U^*D_a^*\underbrace{U)(U^*}_{= I}D_aU) =$$

$$U^*D_a^*D_aU$$

$$\shortparallel$$

$$U^*D_aD_a^*U = \underbrace{U^*D_aU\,U^*D_a^*U}_{= A\,A^*}$$

Δείξαμε ότι:

διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός

$\overset{?}{\Leftarrow}$ όχι βέβαια: $\exists$ φυσιολ. (μάλιστα αυτοσυζ.) χωρίς καθόλου ιδιοδιανύσματα

Λήμμα Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός και $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε: $Tx = \lambda x$
τότε $T^* x = \bar{\lambda} x$

Απόδ $(T - \lambda I)x = 0$

$\Downarrow$

$\|(T-\lambda I)x\| = 0$

$\Updownarrow$ φυσιολ

$\|(T-\lambda I)^* x\| = 0$

αφού $T_\lambda = T - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, $T_\lambda^* = T^* - \bar{\lambda} I$

$\|(T^* - \bar{\lambda} I)x\| = 0$ δηλ. $T^* x = \bar{\lambda} x$ ∎

Πορ Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τότε κάθε ιδιόχωρος M_λ του T, ανάγει τον T
δηλ. αν $x \in M_\lambda^\perp$ τότε $Tx \in M_\lambda^\perp$

Απόδ $\forall y \in M_\lambda$: $\langle x, y\rangle = 0$
τώρα: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ ($y \in M_\lambda \Rightarrow T^* y = \bar{\lambda} y$)

$= \langle x, \underbrace{\bar{\lambda} y}_{\in M_\lambda} \rangle = 0$

άρα $Tx \in M_\lambda^\perp$ ∎

Δηλαδή:

$$T = \begin{array}{cc} M_\lambda & M_\lambda^\perp \\ \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_{M_\lambda} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right. & \left.\right] \end{array}$$

Πορ Αν T φυσιολογικός και $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές του, τότε οι M_λ και M_μ είναι $\perp$

Απόδ Πάρε $x \in M_\lambda$, $y \in M_\mu$ νδο $\langle x, y\rangle = 0$

Έχω: $\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ (Λήμμα)
$= \langle x, \bar{\mu} y\rangle$
$= \mu \langle x, y\rangle$

Αλλά $\lambda \neq \mu$
άρα: $\langle x, y\rangle = 0$

οπότε

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_\lambda & M_\mu & (M_\lambda \oplus M_\mu)^\perp \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda I_{M_\lambda} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{M_\mu} & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \end{array}$$

Θεώρημα Αν $\dim H = n < +\infty$ και $T\in\mathcal{B}(H)$ κανονικός τότε διαγωνοποιείται (ως προς μία ΟΚ βάση)

Απόδ Επειδή ο H είναι μιγαδ. χώρος ο T έχει ιδιοτιμές: είναι οι ρίζες του $p(\lambda) = \det(T-\lambda I)$

τις γράφω $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ $m \le \dim H$

Ξέρω ήδη ότι

- $\forall\, M_{\lambda_n}$ ανάγει τον T
- $T|_{M_{\lambda_n}} = \lambda_n I_{M_{\lambda_n}}$
- $\{M_{\lambda_n}\}$ $\perp$ ανά δύο

Τώρα: Θεωρώ το $\bigoplus_{n=1}^{m} M_{\lambda_n} = H_0$. **Ισχ** ότι $= H$

Απόδ: Αφού κάθε M_{λ_n} ανάγει τον T

το $\bigoplus_{n=1}^{m} M_{\lambda_n}$ ανάγει τον T (γιατί?)

άρα ο $(H_0)^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος

Θεωρώ τον $T_0 : (H_0)^\perp \longrightarrow (H_0)^\perp$

$T_0 = T|_{(H_0)^\perp}$

και επειδή $(H_0)^\perp$ έχει πεπερ. διάσταση ο T_0 θα έχει ιδιοτιμές

δηλ θα $\exists\, x \in H_0^\perp$ και $\lambda\in\mathbb{C}$: $x \neq 0$

$$T_0 x = \lambda x$$
$$T_0 x = Tx$$

δηλ το x είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ

οπότε: $\lambda \in \{\lambda_1 \dots \lambda_m\}$

πχ $\lambda = \lambda_n$

$\left.\begin{array}{l}\text{οπότε } x \in M_{\lambda_n} \\ \text{αλλά } x \in H_0^\perp\end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$ άτοπο

∎

Δείξαμε ότι αν $\{\lambda_1 \ldots \lambda_m\}$ οι ιδιοτιμές του T

τότε

$$\bigoplus_{\kappa=1}^{m} M_{\lambda_\kappa} = H$$

αλλά $\forall \kappa = 1 \ldots m$, $T\big|_{M_{\lambda_\kappa}} = \lambda_\kappa I_{M_{\lambda_\kappa}}$

οπότε $\cancel{\exists}$ $\forall$ βάση του M_{λ_κ} τον διαγωνοποιεί. Διαλέξτε μία $\forall \lambda_\kappa$.

όπως δημιουργώ την ένωση των ορθ. βάσεων των M_{λ_κ} έχω μία ορθ. βάση του H

που διαγωνοποιεί τον T

$$\begin{array}{cccc} M_{\lambda_1} & M_{\lambda_2} & & M_{\lambda_m} \end{array}$$

$$T \sim \begin{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \lambda_m & 0 \\ 0 & \lambda_m \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Παράδ. (σε ∞-διάστατο χώρο) $L^2([-\pi,\pi])$

Έστω f: συνεχής + 2π-περιοδική

ορίζω

$$K_f : L^2 \to L^2$$

ως εξής: $\forall g \in C([-\pi,\pi])$: $(K_f g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) \frac{dy}{2\pi}$

η συνάρτηση $h(x,y) = f(x-y)$

είναι συνεχής

άρα ο K_f ορίζεται καλά

και έχουμε δείξει ότι συμπαγής.

Μαγικό κόλπο:

Θέτω: $g_n(x) = e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$

έχω $(K_f g_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{iny} \frac{dy}{2\pi}$

$(t = x-y)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(t)\, e^{inx} e^{-int}\, d(-t)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) e^{-int}\, dt \right)}_{(\text{περιοδικός})} e^{inx}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt \right) g_n(x)$$

έδειξα

$$K_f g_n = \hat{f}(n)\, g_n$$

Ξέρω: $\{g_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ON βάση του $L^2([-\pi,\pi])$ (605)

άρα ο K_f διαγωνοποιήσιμος