23 Νοεμβ 2017

“Κλασική” Συναρτ. Ανάλυση		“Κβαντισμένη” Συναρτ. Αναλ.
ℓ^∞		$\underset{\sim}{\mathcal{B}(\ell^2)}$
$a \in \ell^\infty$	$\rightsquigarrow$	$D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$
$a \in c_{00}$	$\rightsquigarrow$	$D_a \in \mathcal{F}(\ell^2)$: πεπερ. τάξης
$a \in c_0$		$D_c \in \mathcal{K}(\ell^2)$

$$a = (a(1), a(2), \dots \mid \;) \rightsquigarrow D_a = \left[\begin{array}{ccc|c} a(1) & & & \\ & a(2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

: $\mathcal{F}(E, F)$: “μιμείται c_{00}

$\mathcal{K}(E, F)$: “μιμείται c_0

$\mathcal{B}(E, F)$: “μιμείται ℓ^∞

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (εκτός εξεταστέας ύλης)

Σε χώρους Hilbert, $\mathcal{K}(H,K) = \overline{\mathcal{F}(H,K)}$

$\forall K \in \mathcal{K}\ \forall \epsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}:$

$\|K - F\| < \epsilon$

$H = K$ Banach: όχι πάντα

$\Updownarrow$

ο H έχει τη AP (approximation property)

Παρ. $\forall$ χώρο Banach E $\exists$ (φραγμ. τελεστής πεπερ. τάξης $\neq 0$:

Πάρε $x \in E \setminus \{0\}$, πάρε $f \in E^* \setminus \{0\}$ ($\exists$ πάντα: H-B)

ορίζω $E \to E$ τάξης $= 1$

$x \otimes f : y \to f(y)x$

$\Rightarrow$ πάντα $\mathcal{K}(E) \neq \{0\}$

Θεωρώ τελεστές $A: E \to E$

της μορφής: $A = K + \lambda I$, $K \in \mathcal{K}(E)$

και $\lambda \in \mathbb{C}$

: συμπαγής διαταραχή

ενός scalar

Αργυρός + Haydon (2011) (Acta Mathematica)

$\exists$ χώρος Banach E

όπου δεν υπάρχουν άλλοι!: $\mathcal{B}(E) = \mathcal{K}(E) \oplus \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "A"] \arrow[r, phantom, "\uparrow"'] & E \arrow[r, "X"] \arrow[r, phantom, "\uparrow"'] & F \arrow[r, "B"] \arrow[r, phantom, "\uparrow"'] & N \end{tikzcd}$$

φραγμ   συμπ.   φραγμ

$\Rightarrow$ (1) $XA : M \longrightarrow E \longrightarrow F$ συμπαγής

<u>Αποδ</u> :

$$\begin{tikzcd} B_M \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & A(B_M) \arrow[r] & X(A(B_M)) \end{tikzcd}$$

φραγμ   σχετ. συμπ   άρα XA συμπ

— (2) $BX : E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{B} N$

<u>Αποδ</u> : $B_E \longrightarrow X(B_E) \longrightarrow B(X(B_E))$

σχετ. συμπ

όμως B συνεχής, $\overline{X(B_E)}$ συμπαγές

άρα $B(\overline{X(B_E)})$ συμπαγές

άρα $B(\underset{\uparrow}{X}(B_E)) \subseteq B(\overline{X(B_E)})$

είναι ολικά φραγμένο

[απλό ήταν τελικά. Ζητώ συγνώμη]

Άλλη Απόδειξη (όταν E, F : Hilbert)

Ξέρω ότι $\exists\ (F_n)$ από $F_n \in F(E,F)$: $\|X - F_n\| \to 0$

Θέτω $B_n = F_n B : E \to F \to N$

φραγμ. + πεπερ. τάξης

και παρατηρώ ότι

$$\|XB - F_nB\| = \|(X - F_n)B\|$$

$$\leq \underbrace{\|X - F_n\|\,\|B\|}_{\downarrow \atop 0}$$

άρα, ο XB προσεγγίζεται

από τελ. πεπερ. τάξης

$\Rightarrow$ είναι συμπαγής

Άλλη Απόδειξη (πάλι σε Hilbert):

O

$B^* X^*$ είναι συμπαγής διότι X^* συμπαγής (θα δειχθεί σε λίγο...)

$\Downarrow$

$(XB)^* = B^* X^*$ συμπαγής

$\Downarrow$

XB συμπαγής

κ.σ. όριο συμπαγών όχι συμπαγής:

Παράδ: $T_n = \sum_{n=1}^{n} e_n \otimes e_n^*$ (όπου (e_n) συνηθ. ορθ. βάση του ℓ^2)

δηλ: $T_n(x) = \sum_{n=1}^{n} \langle x, e_n \rangle e_n$

δηλ) $T_n(x) = (x(1), x(2), \dots x(n), 0, 0, \dots)$

$= P[e_1 \dots e_n]$ μια προβολή πεπερ. τάξης

$\forall x, \lim_n T_n(x) = x$

Αποδ:

$$\|T_n(x) - x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |T_n(x)(i) - x(i)|^2$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{διότι } (x(n)) \in \ell^2$$

δηλαδή $\underset{\text{πεπερ. τάξης}}{T_n} \xrightarrow{κσ} I$ ↑ δεν είναι συμπαγής

∫ και τελεστές

$H = L^2([0,1])$, $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$

συνεχής (L^2 ?)

ορίζω $A_k : H \to H$

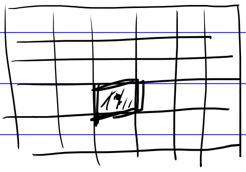
$f \longmapsto A_k f$

$$(A_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt$$

Έχω δείξει ότι είναι καλά ορισμένος και φραγμ. τελεστής. <u>Ισχ</u> A_k είναι συμπαγής

<u>Απόδ</u> $\forall \varepsilon > 0$ Αφού k ομοιόμ. συνεχής στο $[0,1] \times [0,1]$

$\exists$:



από ορθογώνια R_{ij} και $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ώστε

αν $k_\varepsilon(s,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \chi_{R_{ij}}(s,t)$

να έχω $\|k - k_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ [Πάρε $a_{ij} = k(s_i,t_j)$ για κάποιο $(s_i,t_j) \in R_{ij}$]

Πράξεις:

$$(A_{k_\varepsilon} f)(s) = \int_0^1 k_\varepsilon(s,t) f(t)\,dt$$

$R_{ij} = I_i \times I_j$

$\chi_{R_{ij}} = \chi_{I_i} \cdot \chi_{I_j}$

$$= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \chi_{I_i}(s) \chi_{I_j}(t) f(t)\,dt$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\int_0^1 \chi_{I_j}(t) f(t)\,dt \right) \chi_{I_i}(s)$$

<u>δηλ</u>

$$A_{k_\varepsilon} f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\int_{I_j} f(t)\,dt \right) \chi_{I_i}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle f, \chi_{I_j} \rangle \chi_{I_i} \in \text{span}\{\chi_{I_1} \dots \chi_{I_n}\}$$

οπότε ο A_{k_ε} είναι πεπερ. τάξης

Μένει νδο $\|A_{k_\varepsilon} - A_k\| \leq \varepsilon$

$\forall f$

$$(A_k f - A_{k_\epsilon} f)(s) = \int_0^1 \big(k(s,t) - k_\epsilon(s,t)\big) f(t)\,dt$$

$$|(A_k f - A_{k_\epsilon} f)(s)|^2 \le \left(\int_0^1 |k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|\,|f(t)|\,dt\right)^2$$

$$\overset{(C-S)}{\le} \int_0^1 |k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|^2 dt \underbrace{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}_{\|f\|_2^2}$$

$\forall s \in [0,1]$

$$\|A_k f - A_{k_\epsilon} f\|_2^2 \le \underbrace{\int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{|k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|^2}_{} dt\right) ds}_{< \epsilon^2} \|f\|_2^2$$

$$\|A_k f - A_{k_\epsilon} f\|_2 \le \epsilon \|f\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|A_k - A_{k_\epsilon}\| \le \epsilon$$

Παρατ (Αν ξέρουμε Θ μέτρου,,,)

Αυτά δουλεύουν ακόμη όταν $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$

Προτ

$T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(H)$ ισχύει και σε Banach (Θ. Schauder)

$$\begin{tikzcd}
T \in \mathcal{K}(H) \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{υπόδ}"] \arrow[d, Leftrightarrow] & T^* \in \mathcal{K}(H) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\forall (x_\nu) \text{ ου ισχύει } \langle Tx_\nu, x_\nu\rangle \to 0 \arrow[r, Leftarrow] & \forall (x_\nu) \text{ ευ } \langle x, T^* x_\nu\rangle \to 0
\end{tikzcd}$$

▨

Προτ $T \in \mathcal{K}(H,K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(H,K)$

Απόδ (1) Αν $T \in \mathcal{K}(H,K)$, επειδή $T^* \in \mathcal{B}(K,H)$

$\Downarrow$

T^*T συμπαγής

(2) Έστω ότι ο T^*T συμπαγής.

Λαβε μια (x_ν) ακολ. στη B_H

νδο (Tx_n) έχει θεμελ. υπακ.

$$\|Tx_\nu - Tx_m\|^2 = \langle T(x_\nu - x_m), T(x_\nu - x_m)\rangle$$

$$= |\langle T^*T(x_n - x_m), x_n - x_m\rangle|$$

$$\le \|T^*Tx_n - T^*Tx_m\| \, \|x_n - x_m\|$$

$$\le 2\|T^*Tx_n - T^*Tx_m\|$$

Όμως, επειδή T^*T συμπ, η (T^*Tx_ν) έχει συγκλίνουσα υπακ., έστω $(T^*Tx'_n)$

οπότε έχουμε

$$\|Tx'_\nu - Tx'_m\|^2 \le 2\|T^*Tx'_\nu - T^*Tx'_m\|$$

άρα η (Tx'_ν) είναι βασική άρα συγκλίνει

άρα ο T συμπαγής ▨

(3) Αν T^* συμπαγής τότε $T^*T = (\text{συμπ}) \times (\text{φραγ}) = \text{συμπ}.$

$\Downarrow$ (2)

T συμπ.

(4) Αν ο $T = (T^*)^*$ συμπαγής τότε (από τις ιδιότητες)

ο T^* συμπαγής ▨

$A : K \longrightarrow H$ συμπαγής

<u>Ισχ</u> $\overline{im A}$ διαχωρίσιμος υπόχωρος του H

<u>Απόδ</u> A συμπ $\Longrightarrow$ $\overline{A(B_H)}$ συμπαγής άρα διαχωρίσιμο

$$\Downarrow$$

$A(B_H)$ διαχωρίσιμο

$$\Downarrow$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A(nB_H) = nA(B_H)$ διαχωρίσιμος

όμως

$$im(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nB_H)$$

διότι $\forall x \in H$, $\exists n$: $\frac{x}{n} \in B_H$

δηλ.

$x \in nB_H$

$A(x) \in A(nB_H)$

άρα $im(A)$ διαχωρίσιμος (αριθμ. ένωση διαχωρίσιμων (*))

$$\Downarrow$$

$\overline{in(A)}$ διαχωρίσιμο

<u>Ισχ</u> $(KerA)^\perp$ διαχωρίσιμος

<u>Απόδ</u> $(KerA)^\perp = \overline{in(A^*)}$

Αλλά A συμπ $\Longrightarrow$ A^* συμπ

$$\Downarrow$$

$\overline{in(A^*)}$ διαχ.

▨

(*) Ένα αριθμήσιμο πυκνό για τον καθένα
το χαρτί των κάνει πέρα.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

H : Hilbert, E γραμμ. υπχ

$$H = \overline{E} \oplus (\overline{E})^{\perp} = \overline{E} \oplus E^{\perp}$$

$\forall A : H \to H$ φραγμ. γραμμ.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} := PA|_{\overline{E}}$ όπου $P = P(\overline{E})$ $(A_{11} \in B(\overline{E}, \overline{E}))$

$A_{12} := PA|_{E^{\perp}}$ $(A_{12} \in B(E^{\perp}, \overline{E}))$

$A_{21} = \underline{P^{\perp}} A|_{\underline{\overline{E}}}$ $P^{\perp} = P(E^{\perp}) = I - P$

$A_{22} = P^{\perp} A|_{\overline{E}^{\perp}}$

Αν $\underset{\sim}{A(E) \subseteq E}$ (οπότε $A(\overline{E}) \subseteq \overline{E}$)

τότε $A_{21} = 0$

και αντίστροφα $\iff A = \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$

Επίσης $A(E^{\perp}) \subseteq E^{\perp}) \iff A_{12} = 0 \iff A = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right]$

E ανάγει τον A (<u>δηλ.</u>) $A(E) \subseteq E$ <u>και</u> $A(E^{\perp}) \subseteq E^{\perp})$

$$\Updownarrow$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$$

<u>Άσκ.</u>: A αφήνει $\overline{E}$ αναλλοίωτο $\iff A^*$ αφήνει $E^{\perp}$ αναλλοίωτο

$A(E) \subseteq E \iff P^{\perp}AP = 0 \iff AP = PAP$

$A^*(E) \subseteq E \iff PAP^{\perp} = 0 \iff PA = PAP$

A ανάγεται απ. τον $E \iff AP = PA$

Αποδ

$A(E) \subseteq E$: $\forall x \in H$, $Px \in \overline{E}$ θα εχω $AP(x) \in \overline{E}$

οπότε $P^{\perp}AP(x) = 0$

$$\Downarrow$$

$$P^{\perp}AP = 0 \iff AP = PAP$$

αντίστροφα

αν $AP = PAP$

τότε $\forall x \in \overline{E}$, έχω $Ax = APx$

$$\begin{array}{r} APx \\ \| \\ PAPx \in \overline{E} \end{array}$$

ομοίως $A^{*}(E) \subseteq E \iff A^{*}P = PA^{*}P \underset{(\text{παίρνω } *)}{\iff} PA = PAP$

Επίσης: $A(E) \subseteq E$ και $A^{*}(E) \subseteq E \implies PA = PAP = AP$

$$\Downarrow$$

$$PA = AP$$

αντίστρ: $PA = AP \implies AP = AP^2 = (AP)P = (PA)P$

ομοίως $PA = PAP$

$H = \mathbb{C}^2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \not\sim \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}$

μόνη ιδιοτιμή το 0 $\qquad$ ιδιοτιμές στη διαγώνιο

Όταν $\dim H < \infty$, κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει μη τετρ. (κλειστό) αναλλοίωτο υπόχωρο (όχι όμως πάντα ανάγοντα υπόχωρο).

Δηλ. έχει ιδιοδιάνυσμα

!!

Απόδ: $\det(A - \lambda I) = p(\lambda)$

επειδή είμαστε στο $\mathbb{C}$

έχει ρίζα

$\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$:

$A - \lambda I$ όχι 1-1

άρα $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

αν $x \in \ker(A - \lambda I) \setminus \{0\}$

έχω $Ax = \lambda x$

οπότε αν $E = \operatorname{span}\{x\}$

$A(E) \subseteq E$

Πχ για τι $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ο υπόχωρος $[e_1]$ είναι A-αναλλ. αλλά όχι A^*-αναλλ.

[Αν $H = \mathbb{R}^2$, ο τελεστής $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

δεν έχει μη τετρ. αναλλοίωτο υπόχωρο (στροφή κατά $\pi/2$)

Στον $H = \mathbb{C}^2$, τι γίνεται με τον B;]

Πρόβλημα του Αναλλοίωτου Υπόχωρου

"Είναι αλήθεια ότι $\forall A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ έχει μη τετριμμένο $(\neq \{0\}, \neq \ell^2)$ κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;"

- $\exists A \in \mathcal{B}(\ell^1)$ χωρίς μη τετρ. αναλλ. υποχ.
- Αν H χώρος Banach μη διαχωρίσιμος τότε $\forall A \in \mathcal{B}(H)$ έχει μη τετρ. αναλλ. υποχ.
- Κάθε συμπαγής τελεστής σε χώρο Banach έχει μη τετρ. αναλλ. υποχ.
- Κάθε τελεστής που μετατίθεται με έναν συμπαγή, έχει μη τετρ. αναλλ. υποχ. (V. Lomonosov, 1972)