21/11/2017

Κάθε $A \in \mathcal{F}(E,F)$ γράφεται

$$A = \sum_{n=1}^{n} x_n \otimes y_n^* \quad (x_n \in F,\ y_n \in E)$$

δηλ $\quad Ax = \sum_{n=1}^{n} \langle x, y_n \rangle x_n \quad \forall x \in E$

προφ $\quad \|(x_n \otimes y_n^*)(x)\| = \|\langle x, y_n\rangle x_n\|$

$$= |\langle x, y_n\rangle|\, \|x_n\|$$

$$\leq \|x\| \left(\|x_n\| \|y_n\|\right) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \|x_n \otimes y_n^*\| \leq \|x_n\| \|y_n\|$$

Όμως, αν πάρω $x = \dfrac{y_n}{\|y_n\|}$ (για $y_n \neq 0$)

$$(x_n \otimes y_n^*)(x) = \left\langle \frac{y_n}{\|y_n\|}, y_n \right\rangle x_n = \|y_n\| x_n$$

$$\|\quad\quad\| = \|y_n\| \|x_n\|$$

άρα $\quad \|x_n \otimes y_n^*\| = \|x_n\| \|y_n\|$

άρα $\forall$ $A = \sum^{n} x_n \otimes y_n^*$

από Δ.ανισ.:

$$\|A\| \leq \sum_{n=1}^{n} \|x_n \otimes y_n^*\| = \sum_{n=1}^{n} \|x_n\| \|y_n\|$$

αν ... πχ

$$A = \sum_{n=1}^{n} \lambda_n x_n \otimes y_n^* \text{ με } \|x_n\| = \|y_n\| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\|A\| \leq \sum_{n=1}^{n} |\lambda_n| \ 1$$

ισχύει $=$?

πχ $\quad$ αν πάρω $A : \ell^2 \to \ell^2$

$$e_n \to \begin{cases} a(n) e_n, & n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = \left[\begin{array}{cccc|c} a(1) & & & 0 & \\ & a(2) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & a(N) & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{F}(\ell^2)$$

δηλ $\quad A = D_a \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \sup |a(n)| << \sum |a(n)|$

όπου $a = (a(1), \ldots, a(N), 0, 0, \ldots)$

$$\left(\text{δηλ}: \quad A = \sum_{n=1}^{N} a(n)\, e_n \otimes e_n^* \right)$$

(δηλ. $\lim_n a(n)=0$)

Άσκ. Αν $a=(a(n))\in c_0$ τότε ο D_a είναι συμπαγής

Απόδ. Αν $a\in c_{00}$ δηλ. $\exists N: a(n)=0 \ \forall n>N$

τότε D_a είναι πεπερ. τάξης, άρα συμπαγής

Αν όχι,

$\forall \epsilon>0$ $\exists N: \forall n>N$ $|a(n)|<\epsilon$

$$D_a = \begin{array}{c} \quad\quad N \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} a(1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a(N) & & & \\ \hline & & & a(N+1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{array}\right] \end{array}$$

$|\ | < \epsilon$

$D_a =$ " $D_{a_\epsilon} \oplus M$ " : $D_{a_\epsilon} \in \mathcal{F}(\ell^2)$ άρα συμπαγής

και M : $\|M\| < \epsilon$

Άλλη προσέγγιση:

ο D_a στέλνει τον $[e_1 \dots e_N] = E_N$

μέσα στον E_N

άρα στέλνει την B_{E_N} σε σχετικά

συμπαγές (: φραγμένο υποσύνολο

χώρου πεπερ. διάστασης)

Ψάχνω νδο: ο D_a στέλνει την B_{ℓ^2} σε σχετικά

συμπαγές σύνολο.

Hilbert

$A : E \to F$ με $A \in \mathcal{F}(E, F)$

τότε $\operatorname{im}(A) \subseteq F$ είναι πεπ. διάστασης $\subseteq F$

επίσης $(\ker A)^{\perp}$ είναι πεπερ. διάστασης $\subseteq E$

[Απόδ $(\ker A)^{\perp} = \overline{\operatorname{im}(A^*)}$

όμως, ο $A^* \in \mathcal{F}(F, E)$

διότι αν $A = \sum_{n=1}^{n} x_n \otimes y_n^*$

τότε: $A^* = \sum_{n=1}^{n} y_n \otimes x_n^*$

άρα: $\operatorname{im}(A^*)$ είναι πεπερ. διάστασης

άρα $(\ker A)^{\perp} = \operatorname{im}(A^*)$ " "]

$$A : \begin{matrix} E \\ \| \\ (\ker A)^{\perp} \\ \oplus \\ \ker A \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \operatorname{im} A \\ \oplus \\ (\operatorname{im} A)^{\perp} \end{matrix}$$

$$A \sim \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

"ισο" μεταξύ χώρων πεπερ. διάστασης

$$A\big|_{(\ker A)^{\perp}} : (\ker A)^{\perp} \longrightarrow \operatorname{im}(A)$$

Παρένθεση: Κβαντομηχανική

a: τελ. θέσης και p: τελ. ορμής

Heisenberg:

$$(pa - ap)(\xi) = i\hbar\,\xi \quad \forall \xi \in H$$

δεν μπορεί να υλοποιηθεί όταν $\dim H < +\infty$

διότι θα είχαμε

$$pa - ap = (i\hbar) I$$

$$\Downarrow$$

όμως οι pa, ap αντιστοιχούν σε πίνακες, άρα έχουν ίχνη: $\operatorname{tr}(pa - ap) = (\dim H)(i\hbar)$

$$\operatorname{tr}(pa - ap) = 0 \quad \text{άτοπο}$$

Στον χώρο $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$ (χώρος με εσωτ. γινόμενο) μπορώ να ορίσω

$$(a\xi)(t) = t\,\xi(t) \quad \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$(p\xi)(t) = i\hbar\,\xi'(t)$$

από ∫ση κατά μέρη

ικανοποιεί: $(pa - ap) = i\hbar\, I_{C_c^\infty(\mathbb{R})}$

παρατ. ότι ο χώρος δεν είναι Hilbert

E, F : Banach

T : E → F γραμμική

(1) Αν T συμπαγής και ∀ $A \subseteq E$ φραγμ.

$T(A) \subseteq F$ σχετ. συμπαγές

(: $\overline{T(A)}$ συμπ.)

Αποδ. Απ' τον ορισμό, το $T(B_E)$ είναι σχετ. συμπαγές.

Όμως, αν A είναι φραγμ. ∃ $\rho > 0$: $A \subseteq \rho B_E$

$$\Downarrow$$

$$T(A) \subseteq T(\rho B_E) = \rho\, T(B_E)$$

$$\overline{T(A)} \subseteq \underbrace{\rho\, \underbrace{\overline{T(B_E)}}_{\text{συμπαγές}}}_{\text{συμπαγές}}$$

∎

(2) Αν T(φραγμ) ⊆ φραγμ τότε ∀ (x_n) φραγμ. ακολουθία του E, η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Αποδ. Το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ φραγμ.

άρα

$\overline{T(A)}$ συμπαγές.

άρα η ακολουθία (Tx_n) βρίσκεται σε συμπαγές σύνολο $\overline{T(A)}$, οπότε έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

∎

(3) Αν ∀ φραγμ. (x_n) του E η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε το σύνολο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμ.

<u>Απόδ</u> Αν όχι, ∃ $\epsilon>0$ ώστε να μην ∃ πεπερ. κάλυμμα από ϵ-μπάλες.

Οπότε, $\forall x_1 \in B_E$, η $B(Tx_1, \epsilon)$ δεν καλύπτει το $T(B_E)$.

Άρα $\exists x_2 \in B_E$ ώστε $\|Tx_1 - Tx_2\| \geq \epsilon$.

Αλλά η $B(Tx_1, \epsilon) \cup B(Tx_2, \epsilon)$ δεν καλύπτει, άρα

άρα $\exists x_3 \in B_E$ ώστε $\|Tx_3 - Tx_1\| \geq \epsilon$ και $\|Tx_3 - Tx_2\| \geq \epsilon$

... Επαγωγικά $\forall n$ $\exists x_n \in B_E$ ώστε $\|Tx_n - Tx_k\| \geq \epsilon$ $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$

.... ∃ ακολουθία (x_n) στην B_E ώστε $\|Tx_n - Tx_k\| \geq \epsilon$ $\forall n \neq k$

οπότε η (Tx_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

(4) Αν $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμ. νδο T συμπαγής

<u>Απόδ</u> $\overline{T(B_E)}$ είναι ολικά φραγμ. $\subseteq F$: Banach

↳ κλειστό υποσύνολο πλήρους χώρου

άρα: ολικά φραγμ. + πλήρες $\Rightarrow$ συμπαγές

άρα βρέχει.

Θεώρημα Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$: Hilbert)

$T\,\text{ΤΕΕΙ}$

(i) T συμπαγής

(ii) $\forall$ ο.κ. ακολουθία (x_n) ισχύει

$$\langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$$

(iii) $\exists$ ακολουθία (F_n) από $F_n \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$

ώστε $\|T - F_n\| \to 0$

J. R. Ringrose

Απόδ (i) $\Rightarrow$ (ii) Αν όχι $\exists$ ον ακολουθία (x_n)

και $\exists\, d>0$ ώστε $|\langle Tx_m, x_m\rangle| \geq 2d$ για άπειρο πλήθος $m \in \mathbb{N}$.

Περνώντας σε υπακ. μπορώ να υποθ.

$$\forall n,\ |\langle Tx_n, x_n\rangle| \geq 2d$$

(x_n) είναι φραγ. $\overset{\text{υποθ}}{\Rightarrow}$ (Tx_n) έχει συγκλίνουσα

υπακ. (Tx_{k_n})

έστω $Tx_{k_n} \to x$

οπότε

$$\exists\, n_0: \forall n \geq n_0\ \|Tx_{k_n} - x\| < d$$

τότε, $\forall n \geq n_0$:

$$|\langle Tx_{k_n}, x_{k_n}\rangle - \langle x, x_{k_n}\rangle|$$

$$= |\langle Tx_{k_n} - x, x_{k_n}\rangle| \leq \underbrace{\|Tx_{k_n} - x\|}_{< d}\, \|x_{k_n}\|$$

$\Rightarrow$ (από Δικ) $|\langle x, x_{k_n}\rangle| \geq d \quad \forall n$

Απόδ [$d > |\langle Tx_{k_n}, x_{k_n}\rangle - \langle x, x_{k_n}\rangle| \geq \underbrace{|\langle Tx_{k_n}, x_{k_n}\rangle|}_{\geq 2d} - |\langle x, x_{k_n}\rangle|$

$d > 2d - |\langle x, x_{k_n}\rangle| \Rightarrow |\langle x, x_{k_n}\rangle| > 2d - d = d$]

Άτοπο διότι αφού (x_{k_n}) είναι ο.κ., πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_{k_n}\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{(Bessel)}$$

άρα $\langle x, x_{k_n}\rangle \to 0$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Υποθέτω ότι $\forall$ ον (x_n), n $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ θα βρω F_n πεπερ. τάξης

$$\|T - F_n\| < \frac{1}{n}$$

<u>Ιδέα</u> Θα δ.ο. $\exists$ μεγιστική ον. ακολουθία (b_m) ώστε $|\langle Tb_m, b_m\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall m$ (αναγκαστικά πεπερασμένη). Θ.δ.ο. τότε αν $M = span\{b_m\}$ τότε ο T "ζεί" στον M εκτός από ένα κομμάτι με $\| \ \| < \frac{1}{n}$

Ονομάζω $\mathcal{A}$ την οικογένεια όλων των ορθοκανονικών ακολουθιών $A \subseteq H$ πω ικανοποιούν

$$|\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n} \quad \forall a \in A$$

Από την υπόθ., κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι πεπερ. σύνολο διανυσμάτων.

Θεωρώ την $(\mathcal{A}, \subseteq)$ Ισχυρισμός: έχει μέγιστο στοιχείο

<u>Απόδ</u> Αν δεν έχει θα $\exists$ $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \dots$ άπειρο πλήθος με $A_k \in \mathcal{A}$

Θέτω:

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{Έχω μια ον. ακολουθία άπειρη}$$

(διότι αν $x, y \in A_0$ τότε $\exists m$: $x, y \in A_m$ οπότε $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\langle x, y\rangle = 0$)

$$\text{με } |\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n} \quad \forall a \in A_0$$

αντίφαση με την υπόθεση ▨

Έστω B ένα μεγιστικό στοιχείο της $(\mathcal{A}, \subseteq)$.

Θέτω $M = span(B) \subseteq H$

υπόχωρος πεπερ. διάστασης

$\to$ Προφ. $\forall x \in M^\perp$, $\|x\| = 1$ ισχύει $|\langle Tx, x\rangle| < \frac{1}{4n}$ διότι αν $|\langle Tx, x\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ τότε η οικογένεια $B \cup \{x\}$ είναι ον και έχει την $\uparrow$, άρα $\in \mathcal{A}$ αντιφάσκει στη μεγιστικότητα του B.

Τώρα: $\forall u, v \in M^\perp$ με $\|u\|, \|v\| \leq 1$ έχω $\|u \pm v\| \leq 2$

$$\|v \pm iu\| \leq 2$$

οπότε

$$|\langle Tu, v\rangle| = \Big|\langle T\left(\tfrac{u+v}{2}\right), \left(\tfrac{u+v}{2}\right)\rangle - \langle T\left(\tfrac{u-v}{2}\right), \tfrac{u-v}{2}\rangle$$

$$+ i\langle T\left(\tfrac{u+iv}{2}\right), \left(\tfrac{u+iv}{2}\right)\rangle - i\langle T\left(\tfrac{u-iv}{2}\right), \left(\tfrac{u-iv}{2}\right)\rangle\Big|$$

$$\leq 4\left(\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{n}$$

$$
T \sim \begin{array}{c} \\ M \\ M^{\perp} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} M & M^{\perp} \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c} T_{11} & T_{12} \\ \hline T_{21} & T_{22} \end{array}\right]
\end{array}
$$

από $\|T_{22}\| \le \frac{1}{n}$ ενώ οι T_{11}, T_{12}, T_{21} είναι πεπερ. τάξης

Έστω $x, y \in H$, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ έστω P η προβολή στον M τότε $(I-P)x \in M^{\perp}$, $(I-P)y \in M^{\perp}$

άρα

$$|\langle T(I-P)x, (I-P)y \rangle| \le \frac{1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$|\langle (I-P)T(I-P)x, y \rangle| \le \frac{1}{n}$$

$\Downarrow$ sup ως προς $x, y \in B_H$

$$\|(I-P)T(I-P)\| \le \frac{1}{n}$$

Θέτω $F_n = PT + TP - PTP$ $\left(\begin{array}{l} = PT + (I-P)TP \\ = PTP + PTP^{\perp} + P^{\perp}TP \\ = T_{11} + T_{12} + T_{22} \end{array} \right)$

όπως

$$T - F_n = (I-P)T(I-P)$$

$$= (T - PT)(I-P) = T - TP - PT + PTP$$

$\|T - F_n\| \le \frac{1}{n}$ και ο F_n έχει πεπερασμένη τάξη. ■

μένει νδο

Προτ Αν $\forall \epsilon>0$ $\exists F_\epsilon$ πεπερ. τάξη ώστε
$$\|T - F_\epsilon\| < \epsilon$$
τότε T συμπαγής

Έπεται από την εξής:

Προτ Έστω E, F Banach, $K_n \in \mathcal{K}(E,F)$.
Αν $\exists\, T : E \to F$ ώστε $\|K_n - T\| \to 0$
τότε T συμπαγής.

Απόδ Θδο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμ.
Έστω $\epsilon>0$
Από υποθ. $\exists K_n$: $\|T - K_n\| < \epsilon$

Τώρα: K_n είναι συμπαγής (υποθ.)

άρα $K_n(B_E)$ καλύπτεται από $\bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \epsilon)$
(όπου $y_k \in F$)

επομένως $\forall\, x \in B_E$ $\exists\, k = 1 \dots N$:
$\|K_n x - y_k\| < \epsilon$

οπότε
$$\|Tx - y_k\| \le \|Tx - K_n x\| + \|K_n x - y_k\|$$
$$\le \underbrace{\|T - K_n\|\,\|x\|}_{<\epsilon} + \underbrace{\|K_n x - y_k\|}_{\epsilon}$$

έδειξα: $T(B_E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, 2\epsilon)$ ■

Έδειξα ότι: (E, F : Banach)

Προτ $\mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F)$ είναι $\|\ \|$-κλειστό υποσύνολο
άρα ειδικότερα πλήρης μ.χ.

Προτ Είναι γραμμικός χώρος (άρα χώρος Banach)

Απόδ Αν $A, B \in \mathcal{K}(E,F)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) νδο $A + \lambda B$ συμπαγής
Έστω (x_n) φραγμ. ακολουθία στον E.
νδο $((A+\lambda B)x_n)$ έχει συγκλ. υπακ.

απόδ A συμπ $\Rightarrow$ η (Ax_n) έχει συγκλ. υπακ.
τη λέω (Ay_n)
αλλά ο λB είναι συμπαγής οπότε
η $(\lambda B y_n)$ έχει συγκλ. υπακ.
τη λέω $(\lambda B z_n)$

έχω τελειώσει διότι η
$$((A+\lambda B) z_n) = (Az_n) + (\lambda B z_n)$$
συγκλίνει και αυτή
και είναι υπακολουθία της $((A+\lambda B)x_n)$ ■