14 Νοεμ 2017

$P \in \mathcal{B}(H)$ ορθή προβ τότε

(i) $\forall x \in H \quad \|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle \overset{P=P^*}{=} \langle PPx, x \rangle \overset{P^2=P}{=} \langle Px, x \rangle$

(ii) $y \in \operatorname{im} P \iff y = Py \quad \Big(\exists x : y = Px \Downarrow Py = P^2 x = Px = y \Big)$

$\Updownarrow$

$\|y\| = \|Py\|$

απόδ $\Downarrow$ προφ

$\Uparrow \qquad y = Py + (y - Py) = Py + P^\perp y$

(Πυθ) $\|y\|^2 = \|Py\|^2 + \|P^\perp y\|^2$ (όπου $P^\perp = I - P$, $\operatorname{im}(P^\perp) = \ker P = (\operatorname{im}(P))^\perp$)

άρα αν $\|y\| = \|Py\|$ τότε $\|P^\perp y\|^2 = 0$ άρα
$P^\perp y = 0$ δηλαδή
$y - Py = 0$ άρα
$y = Py$

Συμβολ.: $\mathcal{P}(H) = \{ P \in \mathcal{B}(H) \ :\ P = P^* = P^2 \}$

$\mathcal{S}(H) = \{ M \subseteq H$: κλειστοί υπόχ.$\}$ (προσωρινά)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(H) & \longrightarrow & \mathcal{S}(H) \\ P & \longmapsto & \operatorname{im}P \\ P_M & \longleftarrow & M \\ I-P & \longrightarrow & (\operatorname{im}P)^\perp \end{array}$$

- διατηρεί τη διάταξη:

$P, Q \in \mathcal{P}(H)$: $P \le Q \iff \operatorname{im}P \subseteq \operatorname{im}Q$

$\Downarrow$ ισοδύναμα: $\Updownarrow$

$\forall x \quad \langle Px, x\rangle \le \langle Qx, x\rangle \iff \forall x\ [x \in \operatorname{im}P \Rightarrow x \in \operatorname{im}Q]$

Απόδ. $P \le Q \Rightarrow \|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \overset{\forall x,\ \text{υπόθ.}}{\le} \langle Qx, x\rangle = \|Qx\|^2$

δηλ. $\forall x,\ \|Px\| \le \|Qx\|$

Θδο $(\operatorname{im}Q)^\perp \subseteq (\operatorname{im}P)^\perp$

ισοδύναμα: $\ker Q \subseteq \ker P$

Απόδ.: Αν $x \in \ker Q$ τότε $\|Px\| \le \|Qx\| = 0$ άρα $Px = 0$ δηλ. $x \in \ker P$. ∎

Αντίστροφα, έστω $\operatorname{im}P \subseteq \operatorname{im}Q \overset{?}{\Rightarrow} P \le Q$

$\Downarrow$

Θδο $QP = P$

Απόδ. $\forall x$, $Px \in \operatorname{im}P$ άρα $Px \in \operatorname{im}Q$

άρα $Q(Px) = Px$

δηλ. $QP = P$ ∎

- Αν $QP = P$ τότε $PQ = P$

Απόδ. Παίρνω $*$: $(QP)^* = P^* = P$

$(QP)^* = P^* Q^* = PQ$ ∎

- Αν $PQ = P$ τότε $P \le Q$

Απόδ. $\forall x$, $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \overset{(\text{υπόθ})}{=} \|PQx\|^2 \overset{(\|P\| \le 1)}{\le} \|Qx\|^2 = \langle Qx, x\rangle$

άρα $P \le Q$ ∎

• $P\alpha$ προβολή; θέτω $R = P\alpha$

πρέπει $R^* = \alpha^* P^* = \alpha P$

άρα $R^* = R \iff \alpha P = P\alpha$

πρέπει $R^2 = P\alpha P\alpha$ οπότε αν $\alpha P = P\alpha$, τότε;

$$\| $$

$$P P \alpha \alpha = P\alpha = R$$

Απόδειξη: αν $P\alpha = \alpha P$ τότε $R = R^* = R^2$ άρα προβολή.

Αντιστρ., αν R προβολή τότε $R = R^*$ άρα $P\alpha = \alpha P$.

• Όταν $P\alpha = \alpha P$

ιδέα $\operatorname{im}(R) = (\operatorname{im} P) \cap (\operatorname{im} \alpha)$

Αποδ: αν $x \in \operatorname{im} R$ τότε $x = Rx = P(\alpha x) \in \operatorname{im} P$

και $= \alpha(Px) \in \operatorname{im} \alpha$

αντίστροφα: αν $x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} \alpha$

τότε $x = Px$

$$\Downarrow$$

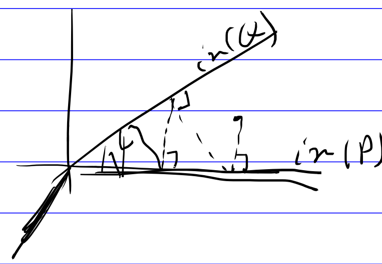
$\alpha x = \alpha P x = Rx$ Αλλά $\alpha x = x$

άρα $x = Rx$ ■

Ερώτηση! αν $P\alpha \neq \alpha P$

τότε ποιό είναι

το $P(\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} \alpha)$;;



$\operatorname{im} P \perp \operatorname{im} a \Rightarrow Pa = 0$

Απόδ. $\forall x, \quad Px \perp ax \Rightarrow \langle Px, ax\rangle = 0$

$$\begin{aligned} &\langle Px, ax \rangle = 0 \\ &\quad \| \\ &\langle x, Pax\rangle = 0 \quad \forall x \\ &\quad \Downarrow \\ &Pa = 0 \end{aligned}$$

και Αντίστροφα: οι συνεπαγωγές αυτές αντιστρέφονται (ΘΝΞ, ΒΜ)

Επίσης, αν $Pa = 0$ τότε $\forall y = ax \in \operatorname{im} a$

ισχύει $P(y) = Pax = 0$

δηλ. $P|_{\operatorname{im} a} = 0$ (ισοδύναμα: $\operatorname{im} a \subseteq \ker P$)

αντίστροφα, αν $P|_{\operatorname{im} a} = 0$ τότε

$P(ax) = 0 \quad \forall x$

δηλαδή

$Pa = 0$

$\Downarrow$

$\operatorname{im} P \perp \operatorname{im} a$

P, Q ορθές προβολές. Έστω $S = P+Q$

. Αν S προβολή τότε $S \geq P$ (αφού $Q \geq 0$)

$$\Downarrow$$

$$SP = P$$

δηλαδή

$$(P+Q)P = P$$

$$P + QP = P \text{ δηλ. } QP = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{im} Q \perp \operatorname{im} P$$

Αντίστροφα, αν $(\operatorname{im} Q) \perp (\operatorname{im} P)$
τότε

$$S^2 = (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2$$
$$= P + 0 + 0 + Q = S$$

και βεβαίως $S^* = P^* + Q^* = P + Q = S$

άρα S ορθή προβολή.

Έστω $S = P+Q$ προβολή. Έχω $\forall x \in H$

$$Sx = Px + Qx \in \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q$$

Άρα $\operatorname{im} S \subseteq \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q$.

Αντίστροφα: αν $x \in \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q$

τότε $\exists y, z$ ώστε: $x = Py + Qz$

οπότε:

$$Sx = Px + Qx = PPy + PQz$$
$$+ QPy + QQz$$
$$= Py + 0$$
$$0 + Qz = x$$

άρα $\operatorname{im} S = \operatorname{im} P + \operatorname{im} Q$

$$\uparrow$$

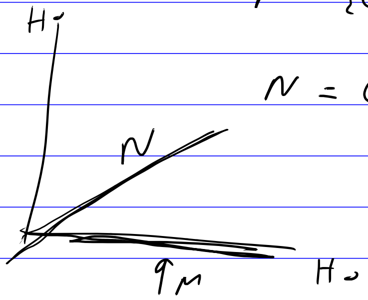
$(= \ker(S^\perp) =$ κλειστός υπόχ.$)$

$$S^\perp = I - S$$

Πρόβ:

Έστω $\mathcal{H}_0 = \ell^2$, $\quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0$ με $\langle (x,y),(u,v)\rangle \overset{o\rho}{:=} \langle x,u\rangle + \langle y,v\rangle$

Θέτω: $M = \{(x,0) : x\in H_0\}$ κλειστός υπόχ.



$N = Gr(D_a) = \{(x, D_a(x)) : x\in H_0\}$ κλειστός (παλαιότερες ασκ.)

όπου $(D_a x)(n) = a_n x(n)$ συνεχής

Έστω $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

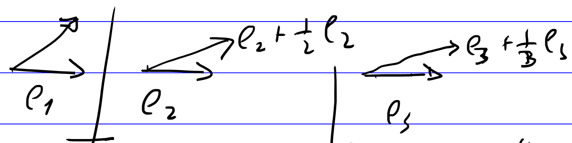
ΔΞΚ $M+N$ δεν είναι κλειστός

Παρατηρήσεις:

Έστω: $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθ. ορθ. βάση του H_0

έχω $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} [e_n \oplus 0]$

και $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} [e_n \oplus \frac{1}{n} e_n]$



"γωνία$(M,N) = 0$"

δηλ.

$\sup\{|\langle x,y\rangle| : x\in M, y\in N, \|x\|=\|y\|=1\}$

(Υπενθύμιση: Άσκηση: όταν $\exists\, \lambda<1$ ώστε $|\langle x,y\rangle| \le \lambda\|x\|\|y\|$ $\forall x\in M, y\in N$, τότε $M+N$ κλειστός)

Ακολουθίες προβολών:

(A) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots$ $\Longrightarrow$ $\forall x$ $\quad a_n x \to a x$ όπου

$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$

$$a = P\left(\overline{\bigcup M_n}\right)$$

• Προσ. $\bigcup M_n$ είναι γρ. χώρος διότι $M_n \subseteq M_{n+1}$, αλλά ενδεχομένως όχι κλειστός

Απόδ. $\{a_n\}$ αύξουσα και $\|a_n\| \le 1$ $\forall n$

$\Downarrow$ (έχουμε δείξει)

$\forall x \in H$ η $(a_n x)$ συγκλίνει

και $\exists a \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$ax = \lim_n a_n x \quad \forall x$$

Επίσης: • $a \ge a_n$ $\forall n$

και • Αν $x \in \mathcal{B}(H)$: $x \ge a_n$ $\forall n$

τότε $x \ge a$

Πρέπει να δω a προβολή.

Ξέρω ήδη ότι $a = a^*$ διότι $a \ge a_n \ge 0$

νδο $a^2 = a$

$\forall x \in H$, $\quad ax = \lim_n a_n x$

$\Downarrow$ (a συνεχής)

$$a(ax) = \lim_n a a_n x$$

(όμως $a a_n = a_n$ $\forall n$)

$$= \lim_n a_n x = ax$$

άρα $a^2 = a$ άρα προβολή

Αν $M = \overline{\bigcup M_n}$ νδο $a = P(M)$

Πράγματι, $\forall n$ $\quad a \ge a_n \Longrightarrow \operatorname{im} a \supseteq \operatorname{im} a_n = M_n$

$$\operatorname{im} a \supseteq M_n \Rightarrow \operatorname{im} a \supseteq \bigcup M_n$$

και επειδή

$\operatorname{im} a$ κλειστός: $\operatorname{im} a \supseteq \overline{\bigcup M_n} = M$

αντίστροφα, αν $x \in \operatorname{im} a$ τότε $x = ax = \lim_n a_n x$

όμως $a_n x \in M_n \subseteq M$

$$x = \lim_n a_n x \in \overline{M} = M$$

άρα $\operatorname{im} a = M$ ∎

(Β) P_n προβολές, $M_n = \text{im}\, P_n$: $M_n \perp M_k$ αν $k \neq n$

Ξέρω $P_1 + P_2$ είναι προβολή στον $M_1 + M_2$ (κλειστός λόγω $\perp$)

Επαγωγικά, κάθε

$Q_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ είναι προβολή (διότι $Q_{n-1} \perp P_n$) στον υποχ. $M_1 + M_2 + \dots + M_n = N_n$

Τώρα έχω προβολές:
$Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_n \leq \dots$

από το προηγούμενο, $\forall x \in H$ η $(Q_n x)$ συγκλίνει στο Qx όπου Q = η προβολή στον $\overline{\bigcup_n N_n}$.

Όμως: $\bigcup N_n = \text{span}\{\bigcup M_n\} \Rightarrow \overline{\bigcup N_n} = \overline{\text{span}\{\bigcup M_n\}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ (συμβολισμός)

(διότι $\forall x, \forall n$, $Q_n x = (P_1 + P_2 + \dots + P_n)x$)

άρα $\lim_n Q_n x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} P_k x = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$

Παρ/ση $\forall x$, τα $\{P_k x : k \in \mathbb{N}\}$ είναι $\perp$ ανά δύο, άρα

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} P_k x\Big\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2$$

$$\Longrightarrow \|Qx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2$$

Παρ/ση ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ συγκλίνει στη $\|\cdot\|_{B(H)}$

διότι αν συνέκλινε θα έπρεπε $\|P_n\| \to 0$ όμως $\|P_n\| = 1$ αν $P_n \neq 0$

δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow \exists n_0 : P_n = 0 \ \forall n > n_0$

Τελεστές πεπερασμένης τάξης:

$A : H \longrightarrow K$ φραγμ. και πεπερασμένης τάξης, έστω n.

οπότε $\operatorname{im} A \subseteq K$ έχει $\dim(\operatorname{im} A) = n < +\infty$.

παίρνω μια $\underset{\sim}{\text{ορθ}}$ βάση $\{x_1 \dots x_n\}$ του $\operatorname{im} A$

οπότε $\forall x \in H$: $Ax \in \operatorname{span}\{x_1 \dots x_n\}$ άρα

$$\underline{Ax} = \sum_{n=1}^{n} \langle Ax, x_n \rangle x_n \in K$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \langle x, A^* x_n \rangle x_n$$

$$\overset{\|}{\text{δηλώνω } y_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \langle x, y_n \rangle x_n = \underline{\sum_{n=1}^{n} (x_n \otimes y_n^*)(x)}$$

$$\Rightarrow \underline{A = \sum_{n=1}^{n} x_n \otimes y_n^*}$$

Αντίστροφα, αν $\sum_{n=1}^{m} x_n \otimes y_n^*$ τότε ένα γραμμ. συνδ. των $x_n \otimes y_n^*$ $n = 1 \dots m$ που είναι φρ. τελεστές πεπερ. τάξης

οπότε το $\sum^{n}$ είναι $\in F(H, K)$

Αν $A = \sum_{n=1}^{n} x_n \otimes y_n^*$

τότε $A^* = \sum_{n=1}^{n} (x_n \otimes y_n^*)^*$

ισχυρ. $= \sum_{n=1}^{n} y_n \otimes x_n^*$

$\forall \xi, \eta$:

$\underline{\text{Απόδ}}$ $\langle A^* \xi, \eta \rangle \overset{\text{ορ}}{=} \langle \xi, A\eta \rangle = \langle \xi, \sum_{n=1}^{n} (x_n \otimes y_n^*)(\eta) \rangle$

$$\overset{\text{ορ}}{=} \langle \xi, \sum_{n=1}^{n} \langle \eta, y_n \rangle x_n \rangle$$

$$= \underline{\sum_{n=1}^{n} \langle \xi, x_n \rangle \overline{\langle \eta, y_n \rangle}} \quad (1)$$

Από την άλλη,

$$\langle \left(\sum_{n=1}^{n} y_n \otimes x_n^*\right) \xi, \eta \rangle = \sum_{n=1}^{n} \langle (y_n \otimes x_n^*)(\xi), \eta \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \langle (\langle \xi, x_n \rangle y_n), \eta \rangle$$

$$= \underline{\sum_{n=1}^{n} \langle \xi, x_n \rangle \langle y_n, \eta \rangle} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2):

$$\langle A^* \xi, \eta \rangle = \langle \left(\sum_{n=1}^{n} y_n \otimes x_n^*\right) \xi, \eta \rangle \quad \forall \xi \in K, \ \eta \in H$$

οκ

$A \in \mathcal{F}(H,K)$ τότε $A(B_H)$ φρ. υποσ. του $\operatorname{im} A$ όπου $\dim(\operatorname{im} A) < +\infty$

άρα $\overline{A(B_H)}^{\|\,\|}$ συμπαγές

Ορισμός: Μια $A : H \to K$ γραμμική λέγεται **συμπαγής** αν $\overline{A(B_H)}$ συμπαγές $\subseteq K$

Γράφω $A \in \mathcal{K}(H,K)$

Παρ. συμπαγής $\Rightarrow$ φραγμ. διότι $A(B_H)$ είναι φραγμ. αφού είναι σχετ. συμπαγές

$$\mathcal{K}(H,K) \subseteq \mathcal{B}(H,K)$$

Παράδ. $H = K = \ell^2$ και $A = D_a$ όπου $a \in c_0(\mathbb{N})$ τότε D_a είναι συμπαγής

~~π.χ.~~ $a(n) = \frac{1}{n}$

δηλ. $\overline{\{D_a x : x \in B_{\ell^2}\}} \subseteq \ell^2$ συμπαγές

(Αν π.χ. $a(n) = 1$ $\forall n$ τότε όχι συμπαγής) ΝΑΙ

$\overline{\{(\frac{1}{n} x(n))_{n \in \mathbb{N}}}$ όπου $\sum |x(n)|^2 \le 1\} = C$

συμπαγές $\subseteq \ell^2$ (άσκ.)

Παράδ. $H = K = L^2([0,1])$, $\varphi \in C([0,1] \times [0,1])$

$$(Af)(x) = \int_0^1 \varphi(x,y) f(y)\,dy$$

Άσκ. A είναι συμπαγής (αργότερα)