7 Νοεμβ 2017

$A, B \geq 0$ με $AB = BA$ δ.δ.ο. $AB \geq 0$

Αποδ τότε επίσης $A^{1/2} B = B A^{1/2}$

$$AB = A^{1/2} A^{1/2} B = A^{1/2} B A^{1/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in H \quad \langle ABx, x \rangle = \langle A^{1/2} B A^{1/2} x, x \rangle$$

$$= \langle B A^{1/2} x, (A^{1/2})^* x \rangle$$

$$= \langle B(A^{1/2} x), (A^{1/2} x) \rangle \geq 0$$

∎

Χρησιμοποιήσαμε: $XA = AX$

$$\Downarrow$$

$$XA^{1/2} = A^{1/2} X$$

Αποδ: ο $A^{1/2}$ είναι κ.σ. όριο μιας (A_n) όπου $A_n = p_n(A)$ = πολυώνυμο του A

όμως $XA = AX \Rightarrow XA^2 = A^2 X \Rightarrow XA^n = A^n X$ $\forall n$ (επαγωγή)

$$\Downarrow$$

$$X p_n(A) = p_n(A) X \quad \forall n$$

$\forall \xi \in H$, έχω $A^{1/2} \xi = \lim p_n(A) \xi$

οπότε $A^{1/2} X \xi = \lim p_n(A) X \xi$

$$XA^{1/2} x = X(\lim p_n(A) \xi) = \lim_n (X p_n(A) \xi)$$

$$= \lim (p_n(A) X \xi) = A^{1/2} X \xi \quad \forall \xi,$$

$$\Downarrow$$

$$XA^{1/2} = A^{1/2} X$$

H_1, H_2 : Hilbert

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2 \qquad \text{γρ + φρ}$$

$$H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$$

$$T^*T : H_1 \longrightarrow H_1 \quad : \quad T^*T \in B(H_1)$$

θετικός:

$$\forall x \qquad \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$$

∃! τετραγωνική ρίζα $(T^*T)^{1/2} \in B_+(H_1)$

$$\|$$

ορ: $|T|$

<u>Άσκ</u> Βρείτε $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ ώστε

$$|A+B| \not\leq |A| + |B|.$$

Πολική αναπαράσταση

$$A : H_1 \longrightarrow H_2 \quad \text{γραμμ.}$$

Υποθέτω πρώτα $\dim H_i = d_i < +\infty$

$$A^*A : H_1 \xrightarrow{A} H_2 \xrightarrow{A^*} H_1 \quad \text{θετικός}$$

Είναι γνωστό ότι $\exists$ ο.κ. βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_{d_1}\}$ του H_1
(θα τό δείξουμε αργότερα)
από ιδιοδιανύσματα του A^*A
δηλ. $\exists \lambda_k : A^*A(e_k) = \lambda_k e_k$, $k = 1 \dots d_1$

$$A^*A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 \geq & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{d_1} \end{bmatrix}$$

Παρατ. $\lambda_k \geq 0$ διότι
$\lambda_k = \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle = \langle \lambda_k e_k, e_k \rangle$
$= \langle A^*A e_k, e_k \rangle \geq 0 \ \forall k$

Οπότε ορίζω $s_k = \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1 \dots d_1$

και ορίζω $|A|(e_k) = s_k e_k$, $k = 1 \dots d_1$
και επεκτείνω γραμμικά
(χωρίς χρήση του θεωρ. ύπαρξης $\sqrt{A^*A}$)

$$|A| \sim \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{d_1} \end{bmatrix}$$

γραμμ. θήκη

Παρατ. $\ker |A| = [e_k : s_k = 0] = [e_k : \lambda_k = 0]$
$= \ker A^*A = \ker A$

[Απόδ. αν $x \in \ker A$ τότε $A^*Ax = A^*0 = 0$
αν $x \in \ker(A^*A)$ τότε $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$
$= \langle A^*Ax, x \rangle = 0$]

Μπορώ να ορίσω:

$$V : H_1 \longrightarrow H_2$$

$$V e_k = \begin{cases} \dfrac{A e_k}{s_k} & \text{όταν } s_k > 0 \\ 0 & \text{όταν } s_k = 0 \end{cases}$$

και επεκτείνω γραμμικά

Πράγματι

$$\langle Ae_k, Ae_m\rangle = \langle A^*A e_k, e_m\rangle$$

$$= \langle \lambda_k e_k, e_m\rangle$$

$$= \begin{cases} \lambda_k & \text{όταν } k=m \\ 0 & \text{όταν } k\neq m \end{cases} = \quad \langle \lambda_m e_k, e_m\rangle = \langle e_k, s_m^2 e_m\rangle$$

$$= \langle s_k e_k, s_m e_m\rangle$$

άρα $\left\langle \frac{Ae_k}{s_k}, \frac{Ae_m}{s_m}\right\rangle = \langle e_k, e_m\rangle$ όταν ορίζεται

και τα $\left\{ \frac{Ae_k}{s_k} : s_k>0\right\}$ είναι ορθοκανονική

βάση του $(\ker A^*A)^\perp = (\ker A)^\perp$

οπότε

$$V(e_k) = \begin{cases} \frac{Ae_k}{s_k}, & s_k>0 \\ 0, & s_k=0 \end{cases}$$

Έχω ορίσει μια μερική ισομετρία

με αρχικό χώρο $(\ker A)^\perp$

και τελικό χώρο

$$\operatorname{span}\left\{ \frac{Ae_k}{s_k} : s_k>0\right\}$$

$$= \operatorname{span}\{ Ae_k : s_k>0\}$$

$$= \operatorname{span}\{ Ae_k : k=1 \dots d_1\}$$

$$= A(H_1)$$

και ισχύει

$$V s_k e_k = Ae_k \quad \forall k=1 \dots d_1$$

όμως

$$s_k e_k = |A| e_k$$

άρα ισχύει $V|A| e_k = Ae_k \quad \forall k=1,\dots,d_1$

$$\Downarrow$$

$$V|A| = A \quad \blacksquare$$

Γενική περίπτωση:

$T \in B(H_1, H_2)$: $H_1 \xrightarrow{T} H_2$

$T^*T \in B_+(H_1)$ οπότε ορίζουμε $|T| \in B_+(H_1)$ ως εξής:

$$|T| = (T^*T)^{1/2}$$

Πρτρ: $\forall x \in H_1$, $\|Tx\| = \| |T|x \|$

Απόδ $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$

$$= \langle |T|^2 x, x\rangle = \langle |T|\,|T|x, x\rangle$$

$$= \langle |T|x, |T|x\rangle = \| |T|x\|^2 \quad (*)$$

επιπλέον, $Tx = 0 \Leftrightarrow |T|x = 0$

δηλ. : $\ker T = \ker |T|$

οπότε ορίζω

$V_0 : |T|(H_1) \longrightarrow T(H_1)$

$|T|x \longrightarrow Tx$ καλά ορισμένο

διότι, αν $|T|x = |T|y$ τότε $|T|(x-y) = 0$

$\Downarrow$

$T(x-y) = 0$

$\Downarrow$

$Tx = Ty$

και παρατηρώ: V_0 είναι ισομετρία

διότι $\forall y = |T|x$ έχω

$$\|V_0 y\| = \|V_0(|T|x)\| \overset{o\rho}{=} \|Tx\| \overset{(*)}{=} \underbrace{\| |T|x\|}_{\|y\|}$$

άρα επεκτείνεται σε ισομετρία

$V_1 : \overline{|T|(H_1)} \longrightarrow \overline{T(H_1)}$ επί

Ορίζω:

$$\forall y \in H_1 \quad Vy = \begin{cases} V_1(y) & y \in \overline{|T|(H_1)} \\ 0 & \text{όταν } y \perp \left(\overline{|T|(H_1)}\right) \end{cases}$$

$$H_1 = \overline{|T|(H_1)} \oplus (\qquad)^\perp$$

$$V_1 \downarrow \qquad\qquad \downarrow 0$$

$$H_2 = \overline{T(H_1)} \oplus \left(\overline{T(H_1)}\right)^\perp$$

Έχω V: μερική ισομετρία και

$$\forall x \in H_1 \quad V|T|x = V_1(|T|x) = \underbrace{V_0(|T|x)}_{Tx}$$

$$\Rightarrow V|T| = T$$

ΠΡΟΒΟΛΕΣ:

Αλγεβρικό κομμάτι: Αν $H = M \oplus N$: M, N γρ υπόχ με $M \cap N = \{0\}$

τότε $\forall x \in H$ γράφεται μοναδικά:

$$x = x_M + x_N$$

οπότε η απεικόνιση

$$P: H \longrightarrow H$$

$$x \longmapsto x_M$$

είναι (i) καλά ορισμένη

(ii) γραμμική

(iii) $P \circ P = P$

(iv) $\operatorname{im} P = M$ και $\ker P = N$

Ειδικότερα, όταν H: Hilbert και M: κλ. υπόχ. $N = M^{\perp}$

έχω την ορθή προβολή: $P_M : H \to H$

δηλαδή: $\|x - P_M x\| = \operatorname{dist}(x, M)$ $\forall x \in H$

P προβολή, $P^2 = P$

ΤΕΕΙ: (α) $\exists\, M$ κλειστός υπόχωρος ώστε $P = P_M$

(β) $\operatorname{im} P \perp \ker P$

(γ) $\|P\| \leq 1$

Απόδ (α) $\Rightarrow$ (β): Αν $P = P_M : H \to H : x = x_M + x_{M^\perp}$

$x \longmapsto x_M$

$\operatorname{im} P_M = M$

$\ker P_M = M^\perp$ $\Rightarrow (\operatorname{im} P_M) \perp (\ker P_M)$

(β) $\Rightarrow$ (γ): $\forall x = \overset{\operatorname{im} P}{Px} + \underbrace{(x - Px)}_{\in \ker P \text{ διότι}}$

$P(x - Px) = Px - P^2 x = 0$

άρα από υπόθ. $Px \perp (x - Px)$

$\Downarrow$ (Πυθ)

$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geq \|Px\|^2$

$\Downarrow$

$\forall x, \ \|Px\| \leq \|x\|$ δηλ. $\|P\| \leq 1$

(γ) $\Rightarrow$ (α) Ξέρω $P = P^2$ και ότι $\|P\| \leq 1$

Θέτω $M = \operatorname{im} P$ γραμμ. υπόχ.

Πρέπει: M κλειστός

Δείχνω $\operatorname{im} P = \ker(I - P)$

[Απόδ: Αν $y = Px$ τότε $Py = P^2 x = Px = y$ οπότε

$(I - P)y = y - Py = 0$

άρα $y \in \ker(I - P)$

Αντίστροφα, αν $y \in \ker(I - P)$

τότε $(I - P)y = 0$

οπότε $y = Py \in \operatorname{im} P$ ▨]

Όμως $\|P\| \leq 1$ άρα P συνεχής, άρα $I - P$ συνεχής

άρα $\ker(I - P)$ κλειστός υπόχ

$\Rightarrow \operatorname{im} P$ κλειστός υπόχωρος

Έχω θέσει $M = \operatorname{im} P$

Πρέπει νδο $\ker P = M^\perp \iff (\ker P)^\perp = M^{\perp\perp} = M$

Έστω $x \in (\ker P)^\perp$. Επειδή $Px - x \in \ker P$

έχω $x \perp (Px - x)$

(Πυθ $\Rightarrow$) $\|x\|^2 + \|Px - x\|^2 = \|x + Px - x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$

$\Downarrow$

$\|Px - x\|^2 = 0$ άρα $x = Px \in M$

Έδειξα: $(\ker P)^\perp \subseteq M$

Αν δεν είναι ίσοι, θα $\exists\, y \in M \setminus \{0\}$

$y \perp (\ker P)^\perp$

δηλ: $y \in (\ker P)^{\perp\perp}$

$\| \ker P$

όμως $y = Py$ άρα $y = 0$

οπότε: $(\ker P)^\perp = M$ ▨

Υποθ. $P \in \mathcal{B}(H)$, $P = P^2$

(α) P ορθή προβολή (στον $\operatorname{im}P$)

$\Downarrow$

(β) $P \geq 0$

Απόδ. $\forall x \in H$ νδο $\langle Px, x \rangle \geq 0$

Παρ/ρ: $Px \in \operatorname{im}P$, $x - Px \in \ker P = (\operatorname{im}P)^\perp$

άρα $\langle Px, x - Px \rangle = 0$

$\Downarrow$

$\langle Px, x \rangle = \langle Px, Px \rangle \geq 0$

$$\boxed{\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2}$$

(β) $P \geq 0 \Rightarrow$ (γ) $P = P^* \Rightarrow$ (δ) $PP^* = P^*P$ (προφανή)

(δ) $PP^* = P^*P$ και νδο P ορθή προβολή στον $\operatorname{im}P$

Απόδ. Αρκεί νδο

$(\operatorname{im}P) \perp (\ker P)$

Έστω $y \in \operatorname{im}P$, $x \in \ker P$

$\Downarrow$

$\exists z : y = Pz \Rightarrow Py = P^2 z = Pz = y$

$\langle x, y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle P^* x, y \rangle$ (*)

όμως $x \in \ker P$ άρα $\|Px\| = 0$

$\|$ (P φυσιολογικός)

$\|P^* x\|$

(Απόδ: $\|P^*x\|^2 = \langle P^*x, P^*x \rangle = \langle PP^*x, x \rangle$

$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle P^*Px, x \rangle$)

άρα $P^* x = 0$ οπότε (*) $\Rightarrow$

$\langle x, y \rangle = 0$ ∎

Πρότ (i) P ορθή προβ : $\forall x$ $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$

(ii) P ορθή προβ τότε $y \in \operatorname{im} P$

$$\Updownarrow$$

$$y = Py$$

$$\Updownarrow$$

$$\|y\| = \|Py\|$$

Απόδ $y \in \operatorname{im} P \overset{\text{(το δείξαμε)}}{\Rightarrow} y = Py \overset{\text{Πρότ}}{\Longrightarrow} \|y\| = \|Py\|$

Έστω : $\|y\| = \|Py\|$

τότε θυμίζουμε ότι $\underset{\operatorname{im} P}{Py} \perp \underset{\ker P}{y - Py}$

$$\Rightarrow \|y\|^2 = \|Py + (y - Py)\|^2 \overset{\text{(Πυθ.)}}{=} \|Py\|^2 + \|(y - Py)\|^2$$

Αλλά, $\|y\| = \|Py\|$, άρα $\|y - Py\|^2 = 0 \Rightarrow y = Py$

$= \{ P \in \mathcal{B}(H) : P = P^2 = P^* \}$

$\mathcal{P}(H)$ = οι ορθές προβολές $\qquad\qquad$ $S(M)$ = οι κλειστοί υπόχωροι

$$P \longrightarrow \operatorname{im} P$$

$$P_M \longleftarrow M$$

$$0 \longrightarrow \{0\}$$

$$I \longrightarrow H$$

$$(I - P) \longrightarrow (\operatorname{im} P)^{\perp}$$

Παρ. "διατηρεί τη διάταξη"

δηλ. $P \le Q \iff \operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$

Απόδ. $P \le Q \iff \forall x,\ \langle Px, x\rangle \le \langle Qx, x\rangle$

$$\|Px\|^2 \le \|Qx\|^2 \quad (\le \|x\|^2)$$

$\Downarrow$

Λοιπόν $x \in \operatorname{im} P$ τότε $x = Px$ άρα

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 \le \|Qx\|^2 \le \|x\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|x\|^2 = \|Qx\|^2$$

$\Downarrow$ Άρα

$x = Qx$ άρα $x \in \operatorname{im} Q$

- Έστω $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} a$ τότε $aP = P$

Απόδ. $\forall x \in H$, $Px := y \in \operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} a$

$$\Downarrow$$

$$aPx = Px$$

$$\Downarrow$$

$$aP = P$$

- Αν $aP = P$ τότε $(aP)^* = P^* \Rightarrow Pa = P$

- Αν $Pa = P$ νδο $\langle Px, x\rangle \leq \langle ax, x\rangle \ \forall x$

Απόδ. $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 = \|Pax\|^2 \leq \|ax\|^2 = \langle ax, x\rangle$.

$\blacksquare$