2 Νοεμβρίου 2017

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$

$(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \| \ \|)$ μιγ. χώρος Banach
+ C^*-άλγεβρα

$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T + T^* \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

$\frac{T - T^*}{i} \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

$$T = \underbrace{\frac{T+T^*}{2}}_{\text{"Re } T\text{"}} + i \underbrace{\frac{T-T^*}{2i}}_{\text{"Im } T\text{"}}$$

μοναδικά: $T = A + iB$, $A, B \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

τότε: $A = \frac{T+T^*}{2}$, $B = \frac{T-T^*}{2i}$

διότι $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) \cap (i\mathcal{B}_h(\mathcal{H})) = \{0\}$

Πράγματι, αν $A = iB$ όπου $A, B \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

$$\Downarrow$$

$$A^* = (iB)^* = -iB^*$$

$$A \qquad\qquad -iB$$

$\Rightarrow A = 0$

$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) + i\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$ (αλγ) ευθύ άθροισμα

πραγματικός χώρος Banach

(Αν $A_n \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$ με $\|A_n - A\| \to 0$

τότε

$\forall x \in \mathcal{H}$, $\langle Ax, x \rangle = \lim_n \langle A_n x, x \rangle$

$\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \Leftarrow \langle A_n x, x \rangle \in \mathbb{R}$

$$\Downarrow$$

$$A = A^*$$

$B_+(H) \subseteq B_h(H) \subseteq B(H)$

$A \geq 0 \overset{o\rho}{\Longleftrightarrow} \forall x \in H \quad \langle Ax, x\rangle \geq 0$

Παράδ. Όταν $\dim H < \infty$

- $A = A^* \Rightarrow \exists$ μια ΟΚ βάση του H που τον διαγωνιοποιεί δηλ. $\{x_1 \ldots x_n\}$:

(γνωστό από Γρ. Αλγ., θα το δείξουμε αργότερα)

$$A x_k = \lambda_k x_k \quad k = 1 \ldots n$$

όπου $\lambda_k \in \mathbb{R}$

διότι $\langle A x_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}$

$$\overset{\|}{\lambda_k}$$

- $A \geq 0$ ανν είναι αυτοσυζυγής και οι ιδιοτιμές του είναι ≥ 0

Αποδ:

$\forall x \in H: \quad x = \sum_k \langle x, x_k \rangle x_k$

$$\langle Ax, x\rangle = \sum \langle x, x_k\rangle \underbrace{\langle A x_k, x\rangle}_{\lambda_k \langle x_k, x\rangle}$$

$$= \sum |\langle x, x_k\rangle|^2 \lambda_k$$

άρα: $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall x \Longleftrightarrow \forall \lambda_k \geq 0$

Η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί:

$\Leftrightarrow$ δεν αρκεί: ιδιοτιμές ≥ 0

παράδ: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $1, 1$ αλλά όχι αυτοσυζυγής

πχ $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$$= -2 + 1 = -1$$

Παρ/γ M_f στο $L^2([0,1])$ $\quad f \in C([0,1])$

· Ξέρω $M_f^* = M_{\bar f}$

άρα $M_f = M_f^* \iff f = \bar f$

δηλ. $f(t) \in \mathbb{R}$ $\forall t \in [0,1]$

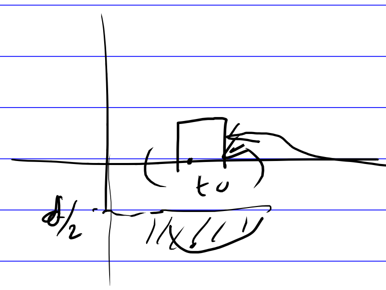
· Ισχυρίζομαι ότι $M_f \geq 0 \iff f(t) \geq 0 \ \forall t \in [0,1]$

Πράγματι, $\forall g \in C[0,1]$

$$\langle M_f g, g \rangle = \langle fg, g \rangle$$

$$= \int f g \bar g = \int f(t) \underbrace{|g(t)|^2}_{\geq 0} dt$$

αν $f(t) \geq 0 \Rightarrow \langle M_f g, g \rangle \geq 0$



$\Leftarrow$: Αν $f(t_0) = d < 0$

$\exists$ διάστημα (a,b) όπου

$f(s) < \frac{d}{2}$

οπότε με κατάλληλο g

δείχνω ότι $\langle M_f g, g \rangle < 0$

· $A, B \geq 0$, $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda) B$

$\forall x \in H$,

$$\langle (\lambda A + (1-\lambda) B) x, x \rangle =$$

$$\underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{\langle Bx, x \rangle}_{\geq 0} \geq 0$$

· Αν $A \geq 0$ και $-A \geq 0$ τότε $\forall x$

$\langle Ax, x \rangle \geq 0$ και $-\langle Ax, x \rangle \geq 0$ άρα $\langle Ax, x \rangle = 0$ $\forall x$

$\Downarrow$ polarise:

$\langle Ax, y \rangle = 0$

$\forall x, y$

$\Downarrow$

$A = 0$

$\underline{\text{Ισχ}}$ $\forall\, T \in B_h(H)$ $\exists$ (όχι μοναδικά) $A, B \geq 0$ ώστε

$$T = A - B$$

$\underline{\text{Απόδ}}$ $\forall x \in H$, $\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|\|x\|$

$$\leq \|T\|\langle x, x\rangle = \langle \lambda I x, x\rangle$$

όπου $\lambda = \|T\|$

$$\Downarrow$$

$\forall x$ $\langle (\lambda I - T)x, x\rangle \geq 0$

δηλ

$\lambda I - T = B \geq 0$

όμοιως:

$\langle Tx, x\rangle \geq -\|T\|\langle x, x\rangle$

$\langle Tx, x\rangle \geq \langle (-\lambda I)x, x\rangle$

δηλ $\underbrace{(T + \lambda I)}_{A} \geq 0$

Παρατ:

$-\lambda I \leq T \leq \lambda I$

όπου $\lambda \geq \|T\|$

οπότε $A - B$

$(T - \lambda I) - (\lambda I - T) = 2T$

$\therefore T = \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$ ✓

$\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, είναι $\| \ \|$-κλειστό:

<u>Αποδ</u>: Αν $\underset{\mathcal{B}_+(H)}{\underset{\cap}{A_n}} \xrightarrow{\| \ \|} A$

Τότε $\forall x \in \mathcal{H}$

$$\langle Ax, x\rangle = \lim_n \underbrace{\langle A_n x, x\rangle}_{\geq 0}$$

$$\Downarrow$$

$\langle Ax, x\rangle \geq 0$ άρα $A \geq 0$

<u>Παρατ</u>

$\|A_n - A\| \to 0 \iff A_n x \to Ax$ ομοιόμορφα ως προς $x \in \underset{\not\equiv}{B_H}$

Ενώ: $A_n x \to Ax$ $\forall x$: σύγκλιση κ.σ.

$\langle A_n x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$

λέγεται weak operator convergence (WOT)

Προφανώς

$\| \ \|$-σύγκλιση $\Rightarrow$ κ.σ. σύγκλιση $\Rightarrow$ WOT-σύγκλιση

$\not\Leftarrow$ $\not\Leftarrow$

(σε απειροδιάστατους χώρους)

Η διάταξη $\geq$ στο $\mathcal{B}_h(H)$ είναι <u>μερική</u> διάταξη, όχι ολική

Παράδ. $\to$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\in \mathcal{B}_h(\mathbb{C}^2)$$

$A - B \not\geq 0$ και $B - A \not\geq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \geq 0$ $B \geq 0$ πότε ώστε AB για να είναι ≥ 0

αναγκαία συνθήκη είναι:

$$(AB) = (AB)^* = B^* A^* = BA$$

άρα, αναγκαία συνθήκη για να είναι $AB \geq 0$ είναι η: $AB = BA$

ικανή;

Πρόσ (Άσκ)

• $A \geq 0$, $B \in \mathcal{B}(H)$

τότε $B^* A B \geq 0$

διότι $\forall x$ $\langle B^* A B x, x \rangle$

$=$

$\langle A B x, B x \rangle$

$=$

$\langle A y, y \rangle$ όπου $y = B x$

≥ 0

• Τι να δούμε: $A \geq 0$, $B \geq 0$ και $AB = BA$

Θέλω νδο $AB \geq 0$

Ας υποθέσω ότι $B = C^2$ όπου $C \geq 0$

και $CA = AC$

τότε

$AB = AC^2 = ACC = CAC \geq 0$

Άσκ. νδο $\forall B \geq 0$ έχει μία τετραγωνική ρίζα $C \geq 0$ με την ιδιότητα $CX = XC$

$\forall X$ τ.ω. $BX = XB$

δηλ ο C μετατίθεται με ότι μετατίθεται με τον B

Πρόσ Αν $B = M_f$ στον $L^2[0,1]$

ξέρω $B \geq 0 \iff f(t) \geq 0 \ \forall t$

θέτω $g(t) = \sqrt{f(t)} \ \forall t$

και $C = M_g \geq 0$

που ικανοποιεί τη συνθήκη:

αν $XB = BX$ τότε $XC = CX$

(γιατί;)

$\forall T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται (!) $T = \underline{T_1 + i}\,T_2$

με $T_1, T_2 \in \mathcal{B}_h$

$\forall A \in \mathcal{B}_h(H)$ γράφεται (όχι μοναδικά)

$$A = B - C$$

όπου $B, C \geq 0$

$$\Downarrow$$

$\forall T \in \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμ. συνδυασμός 4 θετικών τελεστών

- $\forall\, B^*B \geq 0$ διότι $\langle B^*Bx, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0$

!! $\longrightarrow$

- Αντίστροφα, Αν $A \geq 0$ τότε $\exists B$ ώστε $A = B^*B$

<u>Απόδ</u> Πάρε $B = A^{1/2}$ (θα δω υπάρχει)

<u>παράδ</u> $A = D_a$ $\quad a = (a(n))$

$A \geq 0 \iff a(n) \geq 0$

οπότε θέτω $b(n) = \sqrt{a(n)} \geq 0$ $\forall n$

οπότε $D_b \geq 0$

και $D_b^* D_b = D_b^2 = D_{b^2}$

$= D_a$

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$

ορίζω: $\Phi_B : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$

$A \longmapsto B^*AB$

"superoperator"

Τότε, η απεικόνιση Φ_B διατηρεί ≥ 0

δηλ. $A \geq 0 \Rightarrow \Phi_B(A) \geq 0$

Γενικότερα:

$$\Phi(A) = \sum_{k=1}^{n} B_k^* A B_k$$: διατηρεί τα ≥ 0

"quantum channels"

Πρόταση: Γενικευμένη ανισ. Cauchy–Schwarz

$$B \geq 0 \Rightarrow \forall x, y \in H$$
$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle \langle By, y\rangle$$

<u>Απόδ</u>. ορίζω $\varphi_B(x,y) = \langle Bx, y\rangle$

και παρατηρώ ότι είναι ημι-εσωτ. γινόμενο:

- sesqui
- $\overline{\varphi_B(x,y)} = \varphi_B(y,x)$

$$\overline{\langle Bx, y\rangle} = \langle y, Bx\rangle = \langle By, x\rangle = \varphi_B(y,x)$$

- $\varphi_B(x,x) = \langle Bx, x\rangle \geq 0$ ∎

<u>Πρότ</u> $B \geq 0 \Rightarrow \forall x, \ \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle$

<u>Απόδ</u> $\|Bx\|^2 = \langle Bx, Bx\rangle = \langle Bx, y\rangle$, $y = Bx$

$$\|Bx\|^4 = |\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle \langle By, y\rangle$$
$$\leq \langle Bx, x\rangle \|B\| \|y\|^2$$
$$= \langle Bx, x\rangle \|B\| \|Bx\|^2$$
$$\Downarrow$$
$$\|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle$$

Πρόταση

Έχω $B_n = B_n^* \ \forall n$, $B_n \leq B_{n+1}$

$\sup_n \|B_n\| = M < +\infty$

Τότε $\exists\, Y \geq 0$ ώστε : "$B_n \nearrow Y$ κατά σημείο" κτλ

Απόδ. Θεωρώ τις αντίστοιχες sesquilinear forms φ_n:

$$\varphi_n(x,y) = \langle B_n x, y\rangle \quad x,y \in H$$

αν $x=y$: $\left(\varphi_n(x,x)\right) = \left(\langle B_n x, x\rangle\right)_n$ αύξουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}$

και είναι άνω φραγμ.:

$$|\varphi_n(x,x)| \leq \|B_n\|\,\|x\|^2 \leq M\|x\|^2$$

(Απειρ. Ι) $\exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,x) = \sup_n \varphi_n(x,x)$

$\Rightarrow$ (polarization)

$\left(\varphi_n(x,x)\right)$ συγκλίνει $\forall x$

$\Downarrow$

$\left(\varphi_n(x,y)\right)$ συγκλίνει $\forall x, \forall y$

(διότι $\varphi_n(x,y) = \varphi_n(\xi_1,\xi_1) - \varphi_n(\xi_2,\xi_2) + i\varphi_n(\xi_3,\xi_3) - i\varphi_n(\xi_4,\xi_4)$)

Έστω $\varphi(x,y) = \lim_n \varphi_n(x,y)$

παρατηρώ φ είναι sesqui

διότι κάθε φ_n είναι sesqui

πχ: $\varphi(x_1+\lambda x_2, y) = \lim_n \varphi_n(x_1+\lambda x_2, y)$

$\parallel$

$\lim_n \left(\varphi_n(x_1,y) + \lambda \varphi_n(x_2,y)\right)$

$= \varphi(x_1+y) + \lambda\varphi(x_2,y)$

επίσης, $\forall$ $|\varphi_n(x,y)| = |\langle B_n x, y\rangle|$

$$\leq \|B_n\|\,\|x\|\,\|y\|$$
$$\leq M\,\|x\|\,\|y\|$$

$$\Downarrow$$

$|\varphi(x,y)| = \lim_n |\varphi_n(x,y)| \leq M\|x\|\,\|y\|$: $\underline{\varphi \text{ φραγμ}}$

άρα, από $\underline{\text{Riesz}}$, $\exists!\, Y \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\varphi(x,y) = \langle Yx, y\rangle \quad \forall x,y$$

$\underline{\text{δηλ}}$ $\langle Yx, y\rangle = \lim_n \langle B_n x, y\rangle \quad \forall x,y$

$\underline{\text{Παρ}}$ (i) $\forall x$, $\langle Yx, x\rangle = \lim_n \langle B_n x, x\rangle \geq 0$
άρα $Y \geq 0$.

(ii) αφού $\langle B_n x, x\rangle$ αύξουσα,
$\langle Yx, x\rangle \geq \langle B_n x, x\rangle \; \forall x$

άρα $Y \geq B_n \; \forall n$

(iii) αν $C \geq B_n \; \forall n$
τότε $\forall x$

$$\langle Cx, x\rangle \geq \langle B_n x, x\rangle \quad \begin{matrix}\forall x \\ \forall n\end{matrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\langle Cx, x\rangle \geq \lim_n \langle B_n x, x\rangle \; \forall x$$
δηλ
$$C \geq Y \quad \blacksquare$$

" $Y = \sup B_n$ "

Μένει νδο $Yx = \lim_n B_n x \quad \forall x \in H$

(στην τοπολογία της $\| \|$ του $\mathcal{H}$)

$\forall x \in \mathcal{H}, \ \forall m \in \mathbb{N}$:

$$\| Yx - B_m x\|^2 = \|(Y - B_m)x\|^2 \quad \text{αλλά } Y - B_m \geq 0$$

(Λήμμα)

$$\leq \|Y - B_m\| \langle (Y - B_m)x, x\rangle$$

$$\leq \underline{2M} \left(\langle Yx, x\rangle - \langle B_n x, x\rangle\right)$$

[ισχύει $\|Y - B_m\| \leq \|Y\| + \|B_m\| \leq 2M$

διότι $\forall x$

$\langle Yx, x\rangle = \lim \langle B_n x, x\rangle \leq M\|x\|^2$

$\Downarrow$

$\|Y\| \leq M$]

Τελικά

$$\|Yx - B_m x\|^2 \leq 2M\left(\langle Yx, x\rangle - \langle B_m x, x\rangle\right) \longrightarrow 0$$

Έδειξα ότι $Yx = \lim_m B_m x \quad \forall x \in \mathcal{H}$ ■

Θεώρ. $\forall A \geq 0$ έχει (μοναδική) θετική τετρ. ρίζα $X \in B(H)$, $X \geq 0$, $X^2 = A$

Απόδ. $A \geq 0$ τότε $0 \leq \frac{A}{\|A\|} \leq I$

μπορώ να υποθ. $0 \leq A \leq I$

αν θέσω $B = I - A \geq 0$

θα βρώ Y με $0 \leq Y \leq I$

ώστε

$(I - Y)^2 = I - B$

υποθέτοντας $X = I - Y$ θα

έχω $X \geq 0$

και $X^2 = I - B = A$

Υπενθύμιση (Ανεξ. I) Έστω $0 \leq b \leq 1$

Θέτω $b_0 = 0$ και $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b + b_n^2)$

τότε δείχνω

ότι (b_n) είναι αύξουσα και φραγμ.

και αν $y = \lim\limits_n b_n$

τότε

$y = \frac{1}{2}(b + y^2)$

$\Updownarrow$

$(y-1)^2 = 1 - b$

Κάνω "το ίδιο" με τελεστές

Έχω $0 \leq B \leq I$

Θέτω $B_0 = 0$, $B_1 = \frac{1}{2} B$

$B_2 = \frac{1}{2}\left(B + \left(\frac{1}{2}B\right)^2\right)$.

$\vdots$

Γενικά: $B_{n+1} = \frac{1}{2}\left(B + B_n^2\right)$

Παρατ. $\forall$ B_n είναι πολυώνυμο του B με ≥ 0 συντελεστές

(αποδ: προφανής με επαγωγή)

Άρα, κάθε $B_n \geq 0$

και επιπλέον, αν $CB = BC$

τότε $CB_n = B_n C$ $\quad \forall n$

Οπότε, αν δείξω ότι υπάρχει το κ.σ. όριο:

$$\boxed{Yx = \lim_n B_n x} \quad \forall x \quad (*)$$

τότε ο Y έχει τις ιδιότητες που θέλω:

(i) $Y \geq 0$ διότι $\forall x$,

$$\langle Yx, x\rangle = \lim_n \langle B_n x, x\rangle \geq 0$$

(ii) $\forall x$, $\langle B_{n+1} x, x\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle Bx, x\rangle + \langle B_n^2 x, x\rangle\right)$

$$\langle B_n^2 x, x\rangle = \langle B_n x, B_n x\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle Yx, x\rangle = \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Yx, Yx\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle Bx, x\rangle + \langle Y^2 x, x\rangle\right)$$

$$\Downarrow \text{(polarisation)}$$

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(I - Y)^2 = (I - B)^2$$

και, αν $CB = BC$ τότε

$CB_n = B_n C$ $\quad \forall n$

άρα

$$CB_n x = B_n(Cx) \quad \forall n, \forall x$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$CYx = YCx \quad \forall x$$

δηλ.

$$CY = YC$$

Αρκεί λοιπόν να δείξω την (*). Αρκεί γι' αυτό, από την Πρόταση, να δω (B_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμ. Αυτά προκύπτουν με επαγωγή, όπως στην Άσκηση I, αφού παρατηρήσουμε ότι $B_n B_m = B_m B_n$ $\forall n, m$ (διότι είναι πολυώνυμα του B).