Η απεικόνιση $P \longrightarrow \mathrm{Im}P$ διατηρεί τη διάταξη:

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, ΤΑΕΙ:

1. $P \leq Q$ 2. $\|Px\| \leq \|Qx\| \ \forall x \in H$ 3. $\mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$

4. $QP = P$ 5. $PQ = P$

• "διατηρεί τη διάταξη" δηλ $P \leq Q \Leftrightarrow \mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$.

$P \leq Q \Leftrightarrow \forall x \ \|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle = \|Qx\|^2 \ (\leq \|x\|^2)$ $(1 \Leftrightarrow 2)$

$(2 \Rightarrow 3)$

$\Rightarrow$ Παίρνουμε $x \in \mathrm{Im}P$ τότε $x = Px$ άρα $\|x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|Qx\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \|Qx\|^2 \overset{(ii)}{\Longrightarrow} x = Qx$ άρα $x \in \mathrm{Im}Q$.

$(3 \Rightarrow 4)$

Έστω $\mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$ τότε $QP = P$.

$\forall x \in H \ Px := y \in \mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q \Rightarrow QPx = Px \Rightarrow QP = P$

$(4 \Rightarrow 5)$

• Αν $QP = P \Rightarrow (QP)^* = P^* \Rightarrow PQ = P \rightsquigarrow P = P^2 \geq 0 \Rightarrow P = P^*$

$(5 \Rightarrow 1)$

• Αν $PQ = P$ θδο $\langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle \ \forall x$ $\|P\| \leq 1$

$\hookrightarrow \|P(Qx)\| \leq \|P\|\|Qx\| \leq \|Qx\|$

$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 = \|PQx\|^2 \leq \|Qx\|^2 = \langle Qx, x\rangle$.

$\rightsquigarrow$ Αποδεικνύουμε ξανά τη παραπάνω πρόταση & τις "χρήσιμες παρατηρήσεις".

Χρήσιμη Παρατήρηση (γ): Έστω $P \in B(H)$ ορθή προβολή τότε

i) $\forall x \in H \ \|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle \overset{P = P^*}{=\!=} \langle PPx, x\rangle \overset{P^2 = P}{=\!=} \langle Px, x\rangle$.

ii) $y \in \mathrm{Im}P \Leftrightarrow y = Py$ $(\exists x : y = Px \Rightarrow Py = P^2x = Px = y)$ $\Leftrightarrow \|y\| = \|Py\|$.

"$\Rightarrow$" Προφανές

"$\Leftarrow$" $y = Py + (y - Py) = Py + P^{\perp}y \overset{\text{Π.Θ}}{\Longrightarrow} \|y\|^2 = \|Py\|^2 + \|P^{\perp}y\|^2$

(όπου $P^{\perp} = I - P$, $\mathrm{Im}(P^{\perp}) = \mathrm{Ker}P = (\mathrm{Im}P)^{\perp}$).

Άρα, αν $\|y\| = \|Py\|$ τότε $\|P^{\perp}y\|^2 = 0$ άρα $P^{\perp}y = 0$ δηλ $y - Py = 0$

άρα $y = Py$.

Συμβολισμός: $P(H) = \{P \in B(H) : P = P^* = P^2\}$, $\Delta(H) = \{M \subseteq H :$ κλειστός υπόχωρος$\}$ (ισοδύναμα: προσωρινά)

$$\begin{array}{ccc} P(H) & \longrightarrow & \Delta(H) \\ P & \longmapsto & \mathrm{Im}P \\ P_M & \longleftarrow & M \\ I-P & \longrightarrow & (\mathrm{Im}P)^{\perp} \end{array}$$

Διατηρεί τη διάταξη: $P, Q \in \mathcal{P}(H)$: $P \leq Q \iff \mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\forall x \ \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle \iff \forall x \ [x \in \mathrm{Im}P \Rightarrow x \in \mathrm{Im}Q]$$

$P \leq Q \Rightarrow \|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \overset{\text{υποθ.}}{\leq} \langle Qx, x\rangle = \|Qx\|^2$ δηλ $\forall x \ \|Px\| \leq \|Qx\|$

Θ.δ.ο $(\mathrm{Im}Q)^\perp \subseteq (\mathrm{Im}P)^\perp$

Ισοδύναμα: $\ker Q \subseteq \ker P$

Αν $x \in \ker Q \Rightarrow \|Px\| \leq \|Qx\| = 0$ άρα $Px = 0$ δηλ $x \in \ker P$.

Αντίστροφα, έστω $\mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q \overset{?}{\Rightarrow} P \leq Q$. Θ.δ.ο $QP = P$.

$\forall x$ $Px \in \mathrm{Im}P$ άρα $Px \in \mathrm{Im}Q$ άρα $Q(Px) = Px$ δηλ $QP = P$.

- Αν $QP = P \Rightarrow PQ = P$

  Παίρνουμε $*$: $(QP)^* = P^* = P$

  $$(QP)^* = P^*Q^* = PQ.$$

- Αν $PQ = P \Rightarrow P \leq Q$.

$\forall x$ $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \underset{=}{\overset{\text{υποθ.}}{=}} \|PQx\|^2 \overset{\|P\| \leq 1}{\leq} \|Qx\|^2 = \langle Qx, x\rangle$ άρα $P \leq Q$. ┘

- Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H κ' $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε:

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή ανν $PQ = QP$.

  Τότε, $R = P(M \cap N)$

(i') Ειδικότερα, $M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0$.

(ii) Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή ανν $M \perp N$.

  Τότε, $S = P(M + N)$

(iii) Ο τελεστής $D = P - Q$ είναι προβολή ανν $M \supseteq N$.

  Τότε, $D = P(M \cap N^\perp)$.

(i) Έστω P, Q προβολές. Θέτουμε $R = PQ$.

  #1. $R^* = Q^*P^* = QP$ άρα $R^* = R \iff QP = PQ$

  2. $R^2 = PQPQ$ οπότε αν $QP = PQ$, τότε $PQPQ = PPQQ = PQ = R$

  Δηλαδή, αν $PQ = QP \Rightarrow R = R^* = R^2$ άρα προβολή.

  Αντίστροφα, αν R προβολή τότε $R = R^*$ άρα $PQ = QP$

  - Όταν $PQ = QP$

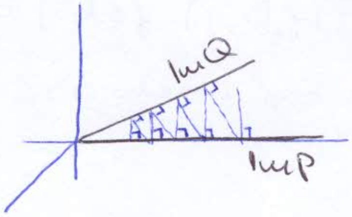
  Ισχυρισμός: $\mathrm{Im}R = (\mathrm{Im}P) \cap (\mathrm{Im}Q)$

  αν $x \in \mathrm{Im}R \Rightarrow x = Rx = P(Qx) \in \mathrm{Im}P$ κ' $x = Rx = Q(Px) \in \mathrm{Im}Q$

Αντίστροφα, αν $x \in \mathrm{Im}P \cap \mathrm{Im}Q \Rightarrow x = Px \Rightarrow Qx = QPx = Rx$

Αλλά, $Qx = x$ άρα $x = Rx$.

Ερώτηση: Αν $PQ \neq QP$, τότε ποιά είναι η $P(\mathrm{Im}P \cap \mathrm{Im}Q)$;



(ί') $\mathrm{Im}P \perp \mathrm{Im}Q \Leftrightarrow PQ = 0$

$\forall x,\ Px \perp Qx \Rightarrow \langle Px, Qx \rangle = \langle x, PQx \rangle = 0\ \forall x \Rightarrow PQ = 0$.

Αντίστροφα, : οι συνεπαγωγές αυτές αντιστρέφονται

Επίσης, αν $PQ = 0 \Rightarrow \forall y = Qx \in \mathrm{Im}Q$ ισχύει $P(y) = PQx = 0$

Δηλαδή $P|_{\mathrm{Im}Q} = 0$ (ισοδύναμα: $\mathrm{Im}Q \subseteq \ker P$)

Αντίστροφα, αν $P|_{\mathrm{Im}Q} = 0 \Rightarrow P(Qx) = 0\ \forall x$ δηλαδή $PQ = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}P \perp \mathrm{Im}Q$.

(ιι) P, Q ορθές προβολές. Θέτουμε $S = P + Q$ από την πρόταση: "διατηρεί τη διάταξη"

Αν S προβολή $\Rightarrow S \geq P$ (αφού $Q \geq 0$) $\Rightarrow SP = P$ δηλαδή $(P+Q)P = P$

$\Rightarrow P + QP = P$ δηλ $QP = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}Q \perp \mathrm{Im}P$

Αντίστροφα, αν $\mathrm{Im}Q \perp \mathrm{Im}P \Rightarrow S^2 = (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 =$

$= P + 0 + 0 + Q = S$ κ' βεβαίως $S^* = P^* + Q^* = P + Q = S$ άρα S ορθή προβολή

Έστω $S = P + Q$ προβολή. Έχουμε $\forall x \in H\ \ Sx = Px + Qx \in \mathrm{Im}P + \mathrm{Im}Q$

Άρα $\mathrm{Im}S \subseteq \mathrm{Im}P + \mathrm{Im}Q$.

Αντίστροφα, αν $x \in \mathrm{Im}P + \mathrm{Im}Q \Rightarrow \exists y, z : x = Py + Qz$ οπότε:

$Sx = Px + Qx = PPy + PQz + QPy + QQz = Py + 0 + 0 + Qz = x$.

Άρα $\mathrm{Im}S = \mathrm{Im}P + \mathrm{Im}Q$ ($= \ker(S^\perp)$ = κλειστός υπόχωρος, $S^\perp = I - S$) ┘

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται κ' στον M κ' στον N.

Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κ' τον M κ' τον N.

Συμβολισμοί: $P \vee Q := P(M \vee N) = P(\overline{M+N})$

$P \wedge Q := P(M \wedge N) = P(M \cap N)$.

#. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.

1. Αν M, N κλειστοί υπόχωροι κ' $\dim N < +\infty \Rightarrow M+N$ κλειστός (άσκηση)
2. Αν $M \perp N \Rightarrow M+N$ κλειστός (γνωστό από Π.Θ ...)
3. Αν $M = \{(x,0) : x \in \ell^2\}$ κ' $N = \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$ τότε (M, N κλειστοί αλλά) $M+N$ όχι κλειστός. (άσκηση)

Πχ.

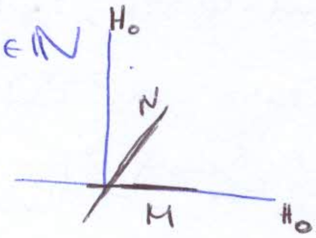
Έστω $H_0 = \ell^2$, $H = H_0 \oplus H_0$ με $\langle (x,y),(u,v) \rangle \overset{ορ.}{:=} \langle x,u \rangle + \langle y,v \rangle$.

Θέτουμε $M = \{(x,0) : x \in H_0\}$ κλειστός υπόχωρος

$N = Gr(D_a) = \{(x, D_a x) : x \in H_0\}$ κλειστός (Παρακολουθείτε SOS πράγματα)

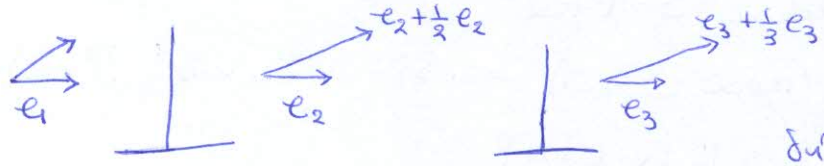
διότι $(D_a x)(n) = a_n x(n)$ συνεχής. Έστω $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ΑΣΚΗΣΗ: $M+N$ ΔΕΝ είναι κλειστός



#: Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ συνήθης ορθ βάση του H_0

Έχουμε $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} [e_n \oplus 0]$ κ' $N = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} [e_n \oplus \frac{1}{n} e_n]$



"γωνία$(M,N) = 0$"

δηλ $\sup\{|\langle x,y \rangle| : x \in M, y \in N, \|x\| = \|y\| = 1\}$

Υπενθύμιση: Άσκηση: Όταν $\exists \lambda < 1 : |\langle x,y \rangle| \le \lambda \|x\| \|y\|$ $\forall x \in M$ $\forall y \in N$

$\Rightarrow M+N$ κλειστός. ⊣

• Αν (Q_i) αύξουσα ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο (όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη) στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{Im} Q_i$, $i \in \mathbb{N}$. Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε για φθίνουσες.

Έστω ακολουθία προβολών $Q_1 \le Q_2 \le Q_3 \le \dots \overset{?}{\Longrightarrow} Q_n x \to Qx$ $\forall x$ όπου

$Q = P(\overline{\cup M_n})$ με $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$

$\cup M_n$ είναι γραμμικός χώρος διότι $M_n \subseteq M_{n+1}$ αλλά ενδεχομένως όχι κλειστός.

$\{Q_n\}$ αύξουσα κ' $\|Q_n\| \le 1$ $\forall n$ $\overset{\text{έχουμε}}{\underset{\text{δείξει}}{\Longrightarrow}}$ $\forall x \in H$ $(Q_n x)$ συγκλίνει κ' $\exists\, Q \in B(H)$ ώστε $Qx = \lim_n Q_n x$ $\forall x$. Επίσης, $Q \geq Q_n$ $\forall n$ κ' αν $X \in B(H) : X \geq Q_n$ $\forall n$ τότε $X \geq Q$. Πρέπει ν.δ.ο Q προβολή.

Ξέρουμε ότι $Q = Q^*$ διότι $Q \geq Q_n \geq 0$ ΝΔΟ $Q^2 = Q$

$\forall x \in H \quad Qx = \lim_n Q_n x \xrightarrow{Q \text{ συνεχής}} Q(Qx) = \lim_n Q Q_n x \xrightarrow[\forall n]{QQ_n = Q_n} \lim_n Q_n x = Qx$

Άρα $Q^2 = Q$ δηλ. Q προβολή.

Αν $M = \overline{\cup M_n}$ ν.δ.ο $Q = P(M)$

Πράγματι, $Q \geq Q_n \; \forall n \Rightarrow \operatorname{Im} Q \supseteq \operatorname{Im} Q_n = M_n$

$\operatorname{Im} Q \supseteq M_n \Rightarrow \operatorname{Im} Q \supseteq \cup M_n$ κ επειδή $\operatorname{Im} Q$ κλειστός: $\overset{\overline{\operatorname{Im} Q}}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{Im} Q}} \supseteq \overline{\cup M_n} = M$

Αντίστροφα, αν $x \in \operatorname{Im} Q \Rightarrow x = Qx = \lim Q_n x$. Όμως, $Q_n x \in M_n \subseteq M$

$\Rightarrow x = \lim_n Q_n x \in \overline{M} = M$ άρα $\operatorname{Im} Q = M$. ⌟

• Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H.

(i) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει $\forall x \in H$ κ $\sum_n P_n x = P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{Im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Για κάθε $x \in H$ ισχύει $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

(ii) Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2 \; \forall x \in H$, τότε οι P_n είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i)).

⌜

P_n προβολές, $M_n = \operatorname{Im} P_n$: $M_n \perp M_k$ όταν $k \neq n$

Ξέρουμε $P_1 + P_2$ είναι προβολή στον $M_1 + M_2$ (κλειστός λόγω $\perp$)

Επαγωγικά, κάθε $Q_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ είναι προβολή (διότι $Q_{n-1} \perp P_n$) στον υπόχωρο $M_1 + M_2 + \dots + M_n := N_n$. Τώρα, έχουμε προβολές $Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_n \leq \dots$ από το προηγούμενο, $\forall x \in H$ η $(Q_n x)$ συγκλίνει στο Qx όπου $Q =$ η προβολή στον $\overline{\bigcup_n N_n}$. Όμως, $\cup N_n = \operatorname{span}\{\cup M_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\cup N_n} = \overline{\operatorname{span}\{\cup M_n\}} = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} M_n$ (διότι $\forall x \; \forall n \; Q_n x = (P_1 + P_2 + \dots + P_n) x$)

Άρα $\lim_n Q_n x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} P_k x = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$.

$\forall x$ τα $\{P_k x : k \in \mathbb{N}\}$ είναι κάθετα ανά δύο, άρα $\left\| \sum_{k=1}^{n} P_k x \right\|^2 \overset{\text{Π.Θ}}{=} \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Qx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2$.

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ συγκλίνει στην $\|\cdot\|_{B(H)}$.

Διότι αν συνέκλινε θα έπρεπε $\|P_n\| \to 0$. Όμως, $\|P_n\| = 1$ αν $P_n \neq 0$.

Δηλαδή, $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \exists n_0 : P_n = 0 \; \forall n \geq n_0$ ⌟

• Μια γραμμική απεικόνιση $T: E\to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E,F λέγεται τάξης n ($n\in\mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E)=\mathrm{Im}T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\mathrm{rank}(T)=n$. Αν οι E,F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E,F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T: E\to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη, δηλαδή:

$$\mathcal{F}(E,F)=\{T\in\mathcal{B}(E,F):\mathrm{rank}(T)<+\infty\}$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E)=\mathcal{F}(E,E)$.

• Αν H,K είναι χώροι Hilbert, $x\in K$ κ' $y\in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$x\otimes y^*: H\to K$ από τον τύπο $(x\otimes y^*)(z)=\langle z,y\rangle x$, $z\in H$.

Άλλοι συμβολισμοί: $x\otimes y^* = xy^* = \theta_{x,y} = |x\rangle\langle y|$.

Ο τελεστής $x\otimes y^*$ είναι φραγμένος κ' $\|x\otimes y^*\|=\|x\|\|y\|$.

Κάθε $T\in\mathcal{F}(H,K)$ πρώτης τάξης ($\mathrm{rank}(T)=1$) είναι αυτής της μορφής (με x,y μη μηδενικά).

Κάθε $A\in\mathcal{F}(H,K)$ γράφεται $A=\sum_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k^*$, κ' ισχύει $A^*=\sum_{k=1}^{n}y_k\otimes x_k^*$.

$A: H\to K$ φραγ. κ' πεπ/νης τάξης έστω n. Οπότε $\mathrm{Im}A\subseteq K$ έχει $\dim\mathrm{Im}A=n<+\infty$

Παίρνουμε μια ΟΚ βάση $\{x_1,\dots,x_n\}$ του $\mathrm{Im}A$, οπότε $\forall x\in H$ $Ax\in\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_n\}$

άρα $Ax=\sum_{k=1}^{n}\langle Ax,x_k\rangle x_k=\sum_{k=1}^{n}\langle x,A^*x_k\rangle x_k \overset{y_k:=A^*x_k}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{n}\langle x,y_k\rangle x_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k\otimes y_k^*)(x)\in K$

$\Rightarrow A=\sum_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k^*$.

Αντίστροφα, αν $\sum_{k=1}^{m}x_k\otimes y_k^*$ τότε είναι γραμ. συνδυασμός των $x_k\otimes y_k^*$, $k=1,\dots,m$ που είναι φραγμένος τελεστής πεπ/νης τάξης, οπότε το $\sum$ είναι $\mathcal{F}(H,K)$.

Αν $A=\sum_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k^*$ τότε $A^*=\sum_{k=1}^{n}(x_k\otimes y_k^*)^* \overset{\text{ισχυρισμός}}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{n}y_k\otimes x_k^*$.

$\forall\xi,\eta$: $\langle A^*\xi,\eta\rangle \overset{\text{ορ}}{=} \langle\xi,A\eta\rangle=\langle\xi,\sum_{k=1}^{n}(x_k\otimes y_k^*)(\eta)\rangle \overset{\text{ορ.}}{=} \langle\xi,\sum_{k=1}^{n}\langle\eta,y_k\rangle x_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle\xi,x_k\rangle\overline{\langle\eta,y_k\rangle}$ ①

Από την άλλη, $\langle(\sum_{k=1}^{n}y_k\otimes x_k^*)\xi,\eta\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle(y_k\otimes x_k^*)(\xi),\eta\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle(\langle\xi,x_k\rangle y_k),\eta\rangle=$

$=\sum_{k=1}^{n}\langle\xi,x_k\rangle\langle y_k,\eta\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle\xi,x_k\rangle\overline{\langle\eta,y_k\rangle}$ ②

Από τις ①,② έχουμε: $\langle A^*\xi,\eta\rangle=\langle(\sum_{k=1}^{n}y_k\otimes x_k^*)\xi,\eta\rangle$ $\forall\xi\in K,\eta\in H$.

Τοπολογική ιδιότητα: Αν $A \in \mathcal{F}(H,K)$, τότε το $A(B_H)$ είναι (σχετικά) συμπαγές στον K.

$\ulcorner$ $A \in \mathcal{F}(H,K)$ τότε $A(B_H)$ φραγμένο $\subseteq \operatorname{Im} A$ όπου $\dim(\operatorname{Im} A) < +\infty$.

Άρα $\overline{A(B_H)}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές. $\lrcorner$

• Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T: E \to F$ λέγεται συμπαγής αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δδ το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F) Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

• Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο. Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

• π.χ. Αν $a = (a_n) \in c_0$, ο τελεστής $D_a = \operatorname{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

$\ulcorner$ Μια $A: H \to K$ γραμμ. απεικόνιση λέγεται συμπαγής αν $A(B_H)$ συμπαγές $\subseteq K$.

Γράφουμε $A \in \mathcal{K}(H,K)$.

\# Συμπαγής $\Rightarrow$ φραγμένη διότι $A(B_H)$ είναι φραγμ. αφού είναι σχετικά συμπαγές.

$$\mathcal{K}(H,K) \subseteq \mathcal{B}(H,K).$$

Π.χ. $H = K = \ell^2$ και $A = D_a$ όπου $a \in c_0(\mathbb{N})$ τότε D_a είναι συμπαγής.

δηλ. π.χ. $a(n) = \frac{1}{n}$ $\{D_a x : x \in B_{\ell^2}\} \subseteq \ell^2$ συμπαγές

Ν.δ.ο. $\{D_a x : x \in B_{\ell^2}\} = \{(\frac{1}{n} x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $\sum |x(n)|^2 \leq 1\} = \mathcal{Q}$ συμπαγές $\subseteq \ell^2$.
(άσκηση)

αν π.χ. $a(n) = 1$ $\forall n$
τότε όχι συμπαγές.

Άλλο π.χ. $H = K = L^2([0,1])$, $\varphi \in C([0,1] \times [0,1])$. Ορίζουμε τελεστή

$(A\xi)(x) = \int_0^1 \varphi(x,y)\xi(y)\,dy$. Ισχυρισμός: A συμπαγής (αργότερα). $\lrcorner$

Συμπλήρωμα στους τελεστές πεπερ. τάξης: Κάθε $T \in \mathcal{F}(H,K)$ «ζει» μεταξύ χώρων πεπερ. διάστασης (των $(\ker T)^\perp = \operatorname{im} T^*$ και $T(\epsilon) = \operatorname{im} T$): ως προς τις διασπάσεις $H = (\ker T)^\perp \oplus \ker T$ και $K = \operatorname{im} T \oplus (\operatorname{im} T)^\perp$ ο T γράφεται

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

//

Παρατήρηση: Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμικός χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό. (πχ $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$, όπου $a_n = \frac{1}{n}$)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό. (γιατί;)

Παρατήρηση: $\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F)$

Αν οι E κ F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα: 1. Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν υπόχωρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

2. Ο $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

Κάθε $A \in \mathcal{F}(E,F)$ γράφεται $A = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k^*$ με $x_k \in F, y_k \in E$ δηλαδή,

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \langle x, y_k \rangle x_k \quad \forall x \in E.$$

#$\|(x_k \otimes y_k^*)(x)\| = \|\langle x, y_k\rangle x_k\| = |\langle x, y_k \rangle| \|x_k\| \le \|x\| (\|x_k\| \|y_k\|) \ \forall x \Rightarrow \|x_k \otimes y_k^*\| \le \|x_k\| \|y_k\|$.

Όμως, αν βάλουμε $x = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ (για $y_k \neq 0$) έχουμε: $(x_k \otimes y_k^*)(x) = \langle \frac{y_k}{\|y_k\|}, y_k \rangle x_k = \|y_k\| x_k$

$\Rightarrow \|(x_k \otimes y_k^*)(x)\| = \|y_k\| \|x_k\|$. άρα $\|x_k \otimes y_k^*\| = \|y_k\| \|x_k\|$.

Άρα $\forall A = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k^*$.

Από τριγωνική: $\|A\| \le \sum_{k=1}^{n} \|x_k \otimes y_k^*\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \|y_k\|$.

Αν πχ $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \otimes y_k^*$ με $\|x_k\| = \|y_k\| = 1 \Rightarrow \|A\| \le \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot 1$

Ισχύει η ισότητα;

πχ αν πάρουμε $A : \ell^2 \to \ell^2$, $e_n \longrightarrow \begin{cases} a(n) e_n, & n \le N \\ 0, & n > N \end{cases}$

Τότε
$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a(1) & & & 0 & \\ & a(2) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & a(N) & \\ \hline & & & & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{F}(\ell^2)$$

Δηλαδή $A = D_a \Rightarrow \|A\| = \sup |a(n)| << \sum |a(n)|$. όπου $a = (a(1), .., a(N), 0, 0, \dots)$

δηλαδή, $A = \sum_{k=1}^{N} a(k)\, e_k \otimes e_k^*$.

Άσκηση: Αν $a = (a(n)) \in c_0$ (δηλ $\lim_n a(n) = 0$), τότε ο D_a είναι συμπαγής.

$\#$ Αν $a \in c_{00}$ δηλ. $\exists N: a(n)=0 \ \forall n>N$, τότε ο D_a είναι πεπερασμένης τάξης άρα συμπαγής.

Αν όχι, $\forall \varepsilon>0 \ \exists N: \forall n>N \ |a(n)|<\varepsilon$. $D_a = \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad N \\ \begin{bmatrix} a(1) & & & \vdots & \\ & a(2) & & \vdots & \\ & & \ddots \ a(n) & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & a(n+1) & \\ & & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$ $|\cdot|<\varepsilon$

D_a "$= D_{a_\varepsilon} \oplus M$": $D_{a_\varepsilon} \in \mathcal{F}(\ell^2)$ άρα συμπαγής και
$M: \|M\|<\varepsilon$.

Άλλη προσέγγιση: ο D_a στέλνει τον $[e_1,\dots,e_N]=E_N$ μέσα στον E_N.
Άρα στέλνει την B_{E_N} σε σχετικά συμπαγές (: φραγμένο υποσύνολο χώρου πεπερασμένης διάστασης!)
Μένει ν.δ.ο. ο D_a στέλνει την B_{ℓ^2} σε σχετικά συμπαγές σύνολο.

$A: E \to F$ με $A \in \mathcal{F}(E,F)$ όπου E,F Hilbert. Τότε:
$\mathrm{im}(A) \subseteq E$ είναι πεπερασμένης διάστασης $\subseteq F$ και
$(\ker A)^\perp$ είναι πεπερασμένης διάστασης $\subseteq E$.

Απόδειξη: $(\ker A)^\perp = \overline{\mathrm{im}(A^*)}$. Όμως, $A^* \in \mathcal{F}(F,E)$ διότι αν $A = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k^*$
τότε $A^* = \sum_{k=1}^{n} y_k \otimes x_k^*$. Άρα $\mathrm{im}(A^*)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.
Άρα $(\ker A)^\perp = \mathrm{im}(A^*)$ είναι πεπερασμένης διάστασης.

$A: \overbrace{(\ker A)^\perp \oplus \ker A}^{=E} \longrightarrow \mathrm{im}A \oplus (\mathrm{im}A)^\perp$ $\quad A \sim \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ "1-1" μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης.

$A\big|_{(\ker A)^\perp} : (\ker A)^\perp \longrightarrow \mathrm{im}(A)$.

Παρένθεση: Κβαντομηχανική
Q: τελεστής θέσης και P: τελεστής ορμής
Heisenberg: $(PQ-QP)(\xi) = -i\hbar\xi \quad \forall \xi \in H$. Δεν μπορεί να υλοποιηθεί
όταν $\dim H < +\infty$ διότι θα έπρεπε $PQ-QP=(i\hbar)I$
Όμως οι PQ, QP αντιστοιχούν σε πίνακες, άρα έχουν ίχνος $\Rightarrow$

$\Rightarrow tr(PQ-QP) = (\dim H)(i\hbar)$
$\overset{\|}{0}$ άτοπο.

Στον χώρο $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ (χώρος με εσωτερικό γινόμενο) μπορούμε να ορίσουμε $(Qf)(t) = t f(t)$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ κ' $(Pf)(t) = i\hbar f'(t)$

Από αντικατάσταση κατά μέλη προκύπτει: $(PQ-QP) = i\hbar I_{C_c^\infty(\mathbb{R})}$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος ΔΕΝ είναι Hilbert. $\perp$.

• Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος κ' $K \subseteq X$. ΤΑΕΙ: (υπενθύμιση)

1. Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος)
2. Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K.
3. Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).
4. Ο $(K, \rho|_K)$ είναι ολικά φραγμένος (δηλ. $\forall \varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) κ' πλήρης.

• Έστω E, F χώροι Banach, $T: E \to F$ γραμμική απεικόνιση. ΤΑΕΙ:

1. Ο T συμπαγής.
2. Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $T(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.
3. Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E, η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.
4. Το σύνολο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο.

Γ $1 \Rightarrow 2$: Αν T συμπαγής τότε $\forall A \subseteq E$ φραγμ, $T(A)$ σχετικά συμπαγές ($\because \overline{T(A)}$ συμπ.)

Απ' τον ορισμό, το $T(B_E)$ είναι σχετικά συμπαγές. Όμως, αν A είναι φραγμένο $\exists \rho > 0$: $A \subseteq \rho B_E \Rightarrow T(A) \subseteq T(\rho B_E) = \rho T(B_E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{T(A)} \subseteq \underbrace{\rho \underbrace{\overline{T(B_E)}}_{\text{συμπαγής}}}_{\text{συμπαγής}}$$

$2 \Rightarrow 3$: Αν T(φραγ) $\subseteq$ φραγ. τότε $\forall (x_n)$ φραγμ. ακολ. στον E, η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ φραγμ. άρα $\overline{T(A)}$ συμπαγές.

Άρα η ακολουθία (Tx_n) βρίσκεται στο συμπαγές σύνολο $\overline{T(A)}$, οπότε έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$3 \Rightarrow 4$: Αν όχι, δηλ. αν $T(B_E)$ δεν είναι ολικά φραγμένο, τότε $\exists \varepsilon > 0$ ώστε να μην $\exists$ πεπερ. κάλυμμα από ε-μπάλες. Οπότε, $\forall x_1 \in B_E$ η $B(Tx_1, \varepsilon)$ δεν καλύπτει το $T(B_E)$. Άρα $\exists x_2 \in B_E : \|Tx_1 - Tx_2\| \geq \varepsilon$.

Αλλά η $B(Tx_1, \varepsilon) \cup B(Tx_2, \varepsilon)$ δεν καλύπτει, άρα $\exists x_3 \in B_E : \|Tx_3 - Tx_1\| \geq \varepsilon$ κ' $\|Tx_3 - Tx_2\| \geq \varepsilon$ ... Επαγωγικά $\forall n$ $\exists x_n \in B_E : \|Tx_n - Tx_k\| \geq \varepsilon$ $\forall k = 1, .., n-1$

... $\exists$ ακολουθία (x_n) στη B_E ώστε $\|Tx_n - Tx_k\| \geq \varepsilon$ $\forall n \neq k$.

Οπότε η (Tx_n) δε μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$4 \Rightarrow 1$: $\overline{T(B_E)}$ είναι ολικά φραγμένο $\subseteq F$: Banach

↳ κλειστό υποσύνολο πλήρους χώρου

Άρα, ολικά φραγμένο + πλήρες $\Rightarrow$ συμπαγές. ⌋

• Αν H χώρος Hilbert κ' $T \in \mathcal{B}(H)$, ΤΑΕΙ:

1. Ο T είναι συμπαγής.

2. Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$

3. Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

⌜ $1 \Rightarrow 2$: Αν όχι, $\exists$ ΟΚ ακολουθία (x_n) κ' $\exists d > 0$ ώστε $|\langle Tx_m, x_m \rangle| \geq 2d$ για άπειρο πλήθος $m \in \mathbb{N}$. Περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\forall n$ $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \geq 2d$. Η (x_n) είναι φραγμένη $\overset{\text{από}}{\underset{\text{υπόθεση}}{\Longrightarrow}}$ $\Rightarrow (Tx_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Tx_{k_n}), έστω $Tx_{k_n} \to x$.

Οπότε $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $\|Tx_{k_n} - x\| < d$. Τότε, $\forall n \geq n_0$ $|\langle Tx_{k_n}, x_{k_n} \rangle - \langle x, x_{k_n} \rangle| =$

$= |\langle Tx_{k_n} - x, x_{k_n} \rangle| \leq \|Tx_{k_n} - x\| \|x_{k_n}\| < d \overset{\text{από}}{\underset{\text{τριγωνική}}{\Longrightarrow}} |\langle x, x_{k_n} \rangle| \geq d$ $\forall n$.

(Αποδειξη: $d > |\langle Tx_{k_n}, x_{k_n}\rangle - \langle x, x_{k_n}\rangle| \geq |\langle Tx_{k_n}, x_{k_n}\rangle| - |\langle x, x_{k_n}\rangle|$

$d > 2d - |\langle x, x_{k_n}\rangle| \Rightarrow |\langle x, x_{k_n}\rangle| > 2d - d = d$)

Άτοπο. Διότι αφού (x_{k_n}) είναι ΟΚ, πρέπει $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_{k_n}\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Bessel)

Άρα $\langle x, x_{k_n}\rangle \to 0$.

$2 \Rightarrow 3$: Υποθέτουμε ότι $\forall$ ΟΚ (x_n), η $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$

Θα βρούμε F_n πεπερασμένης τάξης : $\|T - F_n\| < \frac{1}{n}$.

Ιδέα: Θ.δ.ο $\exists$ μέγιστη ΟΚ ακολουθία (b_m) ώστε $|\langle Tb_m, b_m\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall m$. (αναγκαστικά πεπερασμένη). Θ.δ.ο τότε αν $M = \text{span}\{b_m\}$ τότε ο T "ζει" στον M εκτός από ένα κομμάτι με $\|\cdot\| < \frac{1}{n}$.

Ονομάζουμε $\mathcal{A}$ την οικογένεια όλων των ΟΚ ακολουθιών $A \subseteq H$ που ικανοποιούν $|\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall a \in A$. Από την υπόθεση, κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων. Θεωρούμε την $(\mathcal{A}, \subseteq)$.

Ισχυρισμός: Η $(\mathcal{A}, \subseteq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

Αν δεν είχε, θα $\exists$ $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \ldots$ άπειρο πλήθος με $A_n \in \mathcal{A}$

Θέτουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ έχουμε μια ΟΚ ακολουθία άπειρη με $|\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall a \in A_0$ αντίθετα με την υπόθεση (διότι αν $x, y \in A_0$ τότε $\exists m$: $x, y \in A_m$ οπότε $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\langle x, y\rangle = 0$).

Έστω B ένα μεγιστικό στοιχείο της $(\mathcal{A}, \subseteq)$. Θέτουμε $M = \text{span}(B) \subseteq H$. υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης.

\# $\forall x \in M^\perp$, $\|x\| = 1$ ισχύει $|\langle Tx, x\rangle| < \frac{1}{4n}$ διότι αν $|\langle Tx, x\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ τότε η οικογένεια $B \cup \{x\}$ είναι ΟΚ και έχει την "$\geq$", άρα $\in \mathcal{A}$. Δηλαδή, αντιβαίνει στη μεγιστικότητα του B.

Τώρα: $\forall u, v \in M^\perp$ με $\|u\|, \|v\| \leq 1$ έχουμε $\|u \pm v\| \leq 2$, $\|u \pm iv\| \leq 2$

οπότε $|\langle Tu, v\rangle| = |\langle T(\frac{u+v}{2}), \frac{u+v}{2}\rangle - \langle T(\frac{u-v}{2}), \frac{u-v}{2}\rangle + i\langle T(\frac{u+iv}{2}), \frac{u+iv}{2}\rangle -$

$i\langle T(\frac{u-iv}{2}), \frac{u-iv}{2}\rangle| \leq 4\left(\frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{n}$.

$$T \sim \begin{array}{c|cc} & M & M^{\perp} \\ \hline M & T_{11} & T_{12} \\ M^{\perp} & T_{21} & T_{22} \end{array}$$

ΘΔο $\|T_{22}\| \le \frac{1}{4}$, ενώ οι T_{11}, T_{12}, T_{21} είναι πεπ/νυς τάξης.

Έστω $x, y \in H$, $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Έστω P η προβολή στον M. Τότε

$(I-P)x \in M^{\perp}$, $(I-P)y \in M^{\perp}$ άρα $|\langle T(I-P)x, (I-P)y \rangle| \le \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\langle (I-P)T(I-P)x, y \rangle| \le \frac{1}{4} \xrightarrow[x, y \in B_H]{\text{sup ως προς}} \|(I-P)T(I-P)\| \le \frac{1}{4}$

Θέτουμε $F_4 = PT + TP - PTP = PT + (I-P)TP = PTP + PTP^{\perp} + P^{\perp}TP =$
$= T_{11} + T_{12} + T_{22}$. Οπότε $T - F_4 = (I-P)T(I-P) =$
$= (T-PT)(I-P) = T - TP - PT + PTP$. Δηλ. $\|T - F_4\| \le \frac{1}{4}$ κ' ο F_4 έχει πεπερασμένη τάξη.

$3 \Rightarrow 1$: Μένει ν.δ.ο αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F_\varepsilon$ πεπ/νυς τάξης ώστε $\|T - F_\varepsilon\| < \varepsilon$, τότε T συμπαγής.

Έπεται από την εξής πρόταση: Έστω E, F Banach, $K_4 \in \mathcal{K}(E,F)$.
Αν $\exists T: E \to F$: $\|K_4 - T\| \to 0$, τότε T συμπαγής.

Θ.δ.ο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο. Έστω $\varepsilon > 0$. Από υπόθεση $\exists k_4$: $\|T - k_4\| < \varepsilon$. Τώρα, k_4 είναι συμπαγής (υποθ.) άρα $k_4(B_E)$ καλύπτεται από $\bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, \varepsilon)$, όπου $y_k \in F$. Επομένως, $\forall x \in B_E$ $\exists k = 1, \ldots, N$: $\|k_4 x - y_k\| < \varepsilon$

Οπότε $\|Tx - y_k\| \le \|Tx - k_4 x\| + \|k_4 x - y_k\| \le \|T - k_4\| \|x\| + \|k_4 x - y_k\| < \varepsilon + \varepsilon$.

Δείξαμε: $T(B_E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(y_k, 2\varepsilon)$. ⌟

- Αν E, F χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

⌜ # Είναι γραμμικός χώρος.

Αν $A, B \in \mathcal{K}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ νδο $A + \lambda B$ συμπαγής. Έστω (x_n) φρ. ακολ. στον E.
νδο $((A + \lambda B)x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

A συμπ. $\Rightarrow$ η (Ax_n) έχει συγκλ. υπακ., έστω (Ay_n). Αλλά ο λB είναι συμπαγής οπότε η $(\lambda B y_n)$ έχει συγκλ. υπακ., έστω $(\lambda B z_n)$. Έχουμε τελειώσει διότι η $((A+\lambda B)z_n) = (Az_n)+(\lambda B z_n)$ συγκλίνει κι αυτή κι είναι υπακολουθία της $((A+\lambda B)x_n)$.

«Κλασική Συναρτησιακή Ανάλυση»	«Κβαντισμένη Συναρτησιακή Αν.»
ℓ^∞	$\mathcal{B}(\ell^2)$
$a \in \ell^\infty$	$D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$
$a \in c_{00}$	$D_a \in \mathcal{F}(\ell^2)$: πεπ. τάξης
$a \in c_0$	$D_a \in \mathcal{K}(\ell^2)$.

$a = (a(1), a(2), \dots)$ $\rightsquigarrow$ $D_a = \begin{bmatrix} a(1) & & 0 \\ & a(2) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$

$\mathcal{F}(E,F)$: «μη μεταθ. c_{00}»
$\mathcal{K}(E,F)$: «μη μεταθ. c_0»
$\mathcal{B}(E,F)$: «μη μεταθ. ℓ^∞»

• Έστω H, K χώροι Hilbert κι $A \in \mathcal{B}(H,K)$. Ο A είναι συμπαγής ανν $\forall \varepsilon>0$ $\exists B \in \mathcal{F}(H,K)$ κι $C \in \mathcal{B}(H,K)$: $\|C\|<\varepsilon$ κι $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach

Παρατηρήσεις (εκτός εξεταστέας ύλης):

Σε χώρους Hilbert, $\mathcal{K}(H,K) = \overline{\mathcal{F}(H,K)}$.

$\forall \varepsilon>0$ $\forall k \in \mathcal{K}$ $\exists F \in \mathcal{F}$: $\|K - F\| < \varepsilon$.

(σε χώρους Banach →)
$H = K$ Banach: ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ $\Leftrightarrow$ ο H έχει την AP (προσεγγιστική ιδιότητα)

$\forall$ χώρο Banach E, $\exists$ φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης $\neq 0$:
Παίρνουμε $x \in E\setminus\{0\}$ κι $f \in E^*\setminus\{0\}$ ($\exists$ τέτοιο από H-B). Ορίζουμε τον τελεστή $x \otimes f : \underset{E \to E}{y \mapsto f(y)x}$ τάξης 1. $\Rightarrow$ ΠΑΝΤΑ $\mathcal{K}(E) \neq \{0\}$.

Θεωρούμε τελεστές $A: E \to E$ της μορφής $A = K + \lambda I$, $K \in \mathcal{K}(E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Δηλαδή A συμπαγής διαταραχή ενός scalar

Αργυρός + Haydon (2011) (Acta Mathematica): $\exists$ χώρος Banach E όπου δεν υπάρχουν άλλοι: $\mathcal{B}(E) = \mathcal{K}(E) \oplus \mathbb{C}$

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

• Αν E,F χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος:

Αν $T,S\in\mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda\in\mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S\in\mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X\in\mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερασμένης τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερ. τάξης:

$$M \xrightarrow{A} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{B} N.$$

• Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach, $A\in\mathcal{B}(M,E)$, $X\in\mathcal{K}(E,F)$ και $B\in\mathcal{B}(F,N)$

$\Rightarrow AX\in\mathcal{K}(M,F)$ και $XB\in\mathcal{K}(E,N)$.

Γ

$$M \xrightarrow{A} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{B} N$$

φρ.   κ.συμπ.   φρ.

$\Rightarrow$ (1) $XA: M\to E\to F$ συμπαγής

Απόδειξη: $B_M \to A(B_M) \longrightarrow X(A(B_M))$

φραγμ.   σχετ. συμπ. άρα XA συμπαγής

$\Rightarrow$ (2) $BX: E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{B} N$

Απόδειξη: $B_E \longrightarrow \underset{\text{σχετ. συμπ.}}{X(B_E)} \longrightarrow B(X(B_E))$

Όμως, B συνεχής, $\overline{X(B_E)}$ συμπαγές άρα $B(\overline{X(B_E)})$ συμπαγές

άρα $B(X(B_E)) \subseteq B(\overline{X(B_E)})$

είναι ολικά φραγμένο

Άλλη απόδειξη: (Όταν E,F Hilbert) γιατί η ιδιότητα της προσέγγισης ΔΕΝ ισχύει γενικά σε τυχόντες Banach

Ξέρουμε ότι $\exists\,(F_n)$ από $F_n\in\mathcal{F}(E,F)$: $\|X-F_n\|\to 0$.

Θέτουμε $B_n=F_nB: E\to F\to N$ φραγμ. και πεπερ. τάξης.

και παρατηρούμε ότι $\|XB-F_nB\| = \|(X-F_n)B\| \le \|X-F_n\|\|B\|\to 0$

Άρα ο XB προσεγγίζεται από τελ. πεπερ. τάξης $\Rightarrow$ είναι συμπαγής.

Άλλη απόδειξη σε Hilbert: Ο B^*X^* είναι συμπαγής διότι X^* συμπαγής (θα δειχθεί σε λίγο) $\Rightarrow$ $(XB)^* = B^*X^*$ συμπαγής $\Rightarrow$ ο XB συμπαγής ⊣

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $F(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $B(E,F)$

(σε απειροδιάστατους χώρους)

ομοιόμορφη σύγκλιση στην τοπολογία νόρμας τελεστή

Παρατήρηση 2: Αν $\|A_n - A\| \to 0$ κ' κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως, το κατά σημείο όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση 3: Ειδικότερα, το $K(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $B(E)$.

|κ.σ όριο συμπαγούς όχι συμπαγής|:

Γ Πχ (για την (2)): Στον ℓ^2, $T_n = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k^*$ όπου (e_n) συνήθης ΟΚ βάση του ℓ^2

δηλ $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ δηλ $T_n(x) = (x(1), x(2), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots) =$

$= P[e_1 \ldots e_n]$ μια προβολή πεπερασμένης τάξης

$\forall x$ $\lim_n T_n(x) = x$ δηλ $\lim_n (x(1), x(2), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots) = (x(1), x(2), \ldots, x(n), x(n+1), \ldots)$

Απόδειξη: $\|T_n(x) - x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |T_n(x)(i) - x(i)|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ διότι $(x(n)) \in \ell^2$

Δηλαδή $T_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} I$

συμπαγής ⇐ πεπ. τάξης

δεν είναι συμπαγής. ⊥

συνεχής εννοείται

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Αν $(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy$ προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης

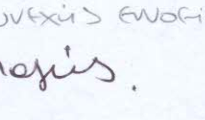
βλ. αρχείο hscompn.pdf.

Γ $H = L^2([0,1])$, $k: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής. Ορίζουμε $A_k: H \to H$, $f \mapsto A_k f$ με

$(A_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\,dt$. Έχουμε δείξει ότι είναι καλά ορισμένος κ' φραγμένος τελεστής. Ισχυρισμός: A_k είναι συμπαγής.

ως συνεχής σε συμπαγές

"διαμέριση"



$\forall \varepsilon > 0$, αφού k ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]\times[0,1]$, $\exists$ από ορθογώνια R_{ij} κ' $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ώστε αν $k_\varepsilon(s,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \chi_{R_{ij}}(s,t)$

να έχουμε $\|k - k_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$ (όπου $a_{ij} = k(s_i, t_j)$ για κάποιο $(s_i, t_j) \in R_{ij}$)

$R_{ij} = I_i \times I_j$, $\chi_{R_{ij}} = \chi_{I_i} \cdot \chi_{I_j}$

Όμως επειδή T^*T συμπαγής, η (T^*Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T^*Tx'_n)$. Οπότε έχουμε $\|Tx'_n - Tx'_m\|^2 \le 2\|T^*Tx'_n - T^*Tx'_m\|$

Άρα η (Tx'_n) είναι βασική άρα συγκλίνει άρα ο T συμπαγής.

Αν T^* συμπαγής τότε $T^*T = (\text{συμπ.}) \times (\text{φραγμ.}) = \text{συμπ.} \Rightarrow T$ συμπ.

Οπότε αν ο $T = (T^*)^*$ συμπαγής, τότε (μόλις δείξαμε) ο T^* συμπαγής $\dashv$

• Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν ο A είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{imA}$ και $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμοι.

Γ

$A : K \to H$ συμπαγής. Ισχυρισμός: $\overline{imA}$ διαχωρίσιμος υπόχωρος του H.

→ υποσύνολο μετρικού χώρου ⇓

A συμπ $\Rightarrow \overline{A(B_H)}$ συμπ άρα διαχωρίσιμο $\Rightarrow A(B_H)$ διαχωρίσιμος $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $A(nB_H) = nA(B_H)$ διαχ. Όμως, $im(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nB_H)$ διότι

$\forall x \in H$ $\exists n : \frac{x}{n} \in B_H$ δηλ $x \in nB_H \Rightarrow A(x) \in A(nB_H)$

Άρα, imA διαχωρίσιμος (αριθμ. ένωση διαχωρισίμων) $\xRightarrow{\text{Προφανώς}}$ $\overline{imA}$ διαχ.

Ισχυρισμός: $(\ker A)^\perp$ διαχωρίσιμος.

$(\ker A)^\perp = \overline{Im A^*}$. Αλλά A συμπ. $\Rightarrow A^*$ συμπ $\Rightarrow \overline{Im(A^*)}$ διαχ.

• Ένας υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι αναλλοίωτος από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο κλειστός υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος. Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E ανάγει τον A όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι. Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ ανν $A_{21} = 0$ και ότι ο A ανάγεται από τον E ανν $A_{12} = A_{21} = 0$.

• Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος ανν $AP = PAP$.
Ο E ανάγει τον A ανν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα ανν $AP = PA$.

Βλ. αρχείο invt.pdf.

Πράξεις: $(A_{k_\varepsilon} f)(s) = \int_0^1 k_\varepsilon(s,t) f(t) dt = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \chi_{I_i}(s) \chi_{I_j}(t) f(t) dt =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\int_0^1 \chi_{I_j}(t) f(t) dt \right) \chi_{I_i}(s)$ δηλαδή $A_{k_\varepsilon} f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(\int_{I_j} f(t) dt \right) \chi_{I_i} =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle f, \chi_{I_j} \rangle \chi_{I_i} \in \operatorname{span}\{\chi_{I_1} \dots \chi_{I_n}\}$ οπότε A_{k_ε} είναι πεπερασμένης τάξης.

Μένει νδο $\|A_{k_\varepsilon} - A_k\| \le \varepsilon$.

$\forall f \quad (A_k f - A_{k_\varepsilon} f)(s) = \int_0^1 (k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)) f(t) dt$

$|(A_k f - A_{k_\varepsilon} f)(s)|^2 \le \left(\int_0^1 |k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)| |f(t)| dt \right)^2 \overset{C-S}{\le} \int_0^1 |k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)|^2 dt \underbrace{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}_{\substack{\text{αριθμός} \\ \|f\|_2^2}}$

$\forall s \in [0,1]$.

$\|A_k f - A_{k_\varepsilon} f\|_2^2 \le \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{|k(s,t) - k_\varepsilon(s,t)|^2}_{<\varepsilon^2 \, \forall s \forall t} dt \right) ds \, \|f\|_2^2$

Άρα $\|A_k f - A_{k_\varepsilon} f\|_2 \le \varepsilon \|f\| \xRightarrow{\sup} \|A_k - A_{k_\varepsilon}\| \le \underline{\varepsilon}$.

• Αν H, K χώροι Hilbert κ' $T \in \mathcal{B}(H,K)$ τότε

$T \in \mathcal{K}(H,K) \Leftrightarrow T^* T \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(K,H)$.

Γ

$T \in \mathcal{K}(H) \underset{\text{αποδ.}}{\Longleftrightarrow} T^* \in \mathcal{K}(H)$ ισχύει κ' σε Banach (Θ. Schauder)

$\Updownarrow \qquad \qquad \Updownarrow$

$\forall (x_n)$ ΟΚ. ισχύει $\langle T x_n, x_n \rangle \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n)$ ΟΚ ισχύει $\langle x_n, T^* x_n \rangle \to 0$

$T \in \mathcal{K}(H,K) \Leftrightarrow T^* T \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(H,K)$.

"⇒" Αν $T \in \mathcal{K}(H,K)$, επειδή $T^* \in \mathcal{B}(K,H) \Rightarrow T^* T$ συμπαγής

"⇐" Έστω $T^* T$ συμπαγής. Παίρνουμε μια (x_n) ακολουθία στη B_H νδο $(T x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$\| T x_n - T x_m \|^2 = \langle T(x_n - x_m), T(x_n - x_m) \rangle = \langle T^* T (x_n - x_m), x_n - x_m \rangle =$

$= |\langle T^* T (x_n - x_m), x_n - x_m \rangle| \le \| T^* T x_n - T^* T x_m \| \underbrace{\|x_n - x_m\|}_{\le \|x_n\| + \|x_m\|} \le 2 \| T^* T x_n - T^* T x_m \|$

↳ παίρνουμε $x_n \in$ μπάλα

Έστω H Hilbert, E γραμμ. υπόχωρος. $H = \overline{E} \oplus (\overline{E})^{\perp} = \overline{E} \oplus E^{\perp}$

$\forall A : H \to H$ φραγμ. γραμμ., $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ όπου:

$A_{11} := PA|_{\overline{E}}$ όπου $P = P(\overline{E})$ $\quad (A_{11} \in B(\overline{E}, \overline{E}))$

$A_{12} := PA|_{E^{\perp}}$ $\quad (A_{12} \in B(\overline{E}^{\perp}, \overline{E}))$

$A_{21} := P^{\perp}A|_{\overline{E}}$, $\quad P^{\perp} = P(E^{\perp}) = I - P$.

$A_{22} := P^{\perp}A|_{\overline{E}^{\perp}}$

Αν $A(E) \subseteq E$ (οπότε $A(\overline{E}) \subseteq \overline{E}$) τότε $A_{21} = 0$ κ' αντίστροφα

$\iff A = \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$

Επίσης, $A(E^{\perp}) \subseteq E^{\perp} \iff A_{12} = 0 \iff A = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right]$

Άρα ο E ανάγει τον A (δηλ. $A(E) \subseteq E$ κ' $A(E^{\perp}) \subseteq E^{\perp}$)

$$\Updownarrow$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$$

Άσκηση: A αφήνει τον $\overline{E}$ αναλλοίωτο $\iff$ A^* αφήνει τον $E^{\perp}$ αναλλοίωτο.

$A(E) \subseteq E \iff P^{\perp}AP = 0 \iff AP = PAP$.

$A^*(E) \subseteq E \iff PAP^{\perp} = 0 \iff PA = PAP$.

A ανάγεται από τον E $\iff AP = PA$

Απόδειξη: $A(E) \subseteq E$: $\forall x \in H$, $Px \in \overline{E}$ θα έχουμε $AP(x) \in \overline{E}$ οπότε

$P^{\perp}AP(x) = 0 \implies P^{\perp}AP = 0 \iff AP = PAP$.

Αντίστροφα, αν $AP = PAP \implies \forall x \in \overline{E}$ έχουμε $Ax = APx = PAPx \in \overline{E}$

Ομοίως, $A^*(E) \subseteq E \iff A^*P = PA^*P \overset{\text{παίρνω}}{\underset{*}{\iff}} PA = PAP$.

Οπότε αν έχουμε $A(E) \subseteq E$ κ' $A^*(E) \subseteq E \implies PA = PAP = AP \implies PA = AP$.

Αντίστροφα, $PA = AP \implies AP = AP^2 = (AP)P = (PA)P$. Ομοίως, $PA = PAP$

·Παρατήρηση: Αν $x\in H$, ο υπόχωρος $E_x=\overline{\text{span}\{x,Ax,A^2x,\dots\}}$ είναι A-αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν ο χώρος H δεν είναι διαχωρίσιμος & $x\neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος.

Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A-αναλλοίωτος. Αν ο H είναι μιγαδικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.

Μένει η περίπτωση του απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

$H=\mathbb{C}^2$ $\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \not\sim \begin{bmatrix}*&0\\0&*\end{bmatrix}$ $\quad$ ΔΕ ΓΙΝΕΤΑΙ $A\sim\left[\begin{smallmatrix}*&0\\0&*\end{smallmatrix}\right]$ ΠΑΝΤΑ! (A)

Δεν διαγωνοποιείται είναι μηδενοδύναμος

η μόνη ιδιοτιμή είναι το 0 $\qquad$ ιδιοτιμές στη διαγώνιο

ΓΙΝΕΤΑΙ ΠΑΝΤΑ

Όταν $\dim H<+\infty$, κάθε $A\in\mathcal{B}(H)$ έχει μη τετριμμένο (κλειστό) αναλλοίωτο υπόχωρο (όχι όλοι πάντα ανάγοντα υπόχωρο)

διότι έχει ιδιοδιάνυσμα

Απόδειξη: $\det(A-\lambda I)=p(\lambda)$ πολυώνυμο του λ & επειδή είμαστε στο $\mathbb{C}$ έχει ρίζα! $\Rightarrow \exists\,\lambda\in\mathbb{C}$: $A-\lambda I$ όχι 1-1 οπότε $\ker(A-\lambda I)\neq\{0\}$. Αν $x\in\ker(A-\lambda I)\setminus\{0\}$ έχουμε $Ax=\lambda x$ οπότε αν $E=\text{span}\{x\}$, τότε $A(E)\subseteq E$.

π.χ. για το $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ έχουμε ότι ο υπόχωρος $[e_1]$ είναι A-αναλλοίωτος αλλά όχι A^*-αναλλοίωτος

[Αν $H=\mathbb{R}^2$, ο τελεστής $B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ δεν έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο (στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$). Στον $H=\mathbb{C}^2$, τι γίνεται με τον B;]

·Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο) χώρο Hilbert H έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο;

ή μήπως υπάρχει τελεστής A που ικανοποιεί $E_x=H$ $\forall x\neq 0$;

· Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

→ Όχι για γενικούς χώρους Banach, άγνωστο για αυτοπαθείς χώρους Banach.

Πρόβλημα του Αναλλοίωτου Υπόχωρου: "Είναι αλήθεια ότι $\forall A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ έχει μη τετριμμένο ($\neq\{0\}$, $\neq \ell^2$) κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;"

- $\exists\, A \in \mathcal{B}(\ell^1)$ χωρίς μη τετριμμένο αναλλ. υποχ.
- Αν H χώρος Banach μη διαχωρίσιμος τότε $\forall A \in \mathcal{B}(H)$ έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.
- Κάθε συμπαγής τελεστής σε χώρο Banach έχει μη τετρ. αναλλ. υποχ.
- Κάθε τελεστής που μετατίθεται με έναν συμπαγή, έχει μη τετρ. αναλλ. υποχ. (V. Lomonosov 1972)

· Έστω E γραμμικός χώρος, $A: E \to E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή της A αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα της A κι το σύνολο $M_\lambda \equiv \{x \in E : Ax = \lambda x\} = Ker(A - \lambda I)$ (που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο ιδιόχωρος της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$.

· Παρατηρήσεις:

1. Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ κι $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$. Μάλιστα, ο M_λ είναι αναλλοίωτος κι από κάθε γραμμική απεικόνιση B που μετατίθεται με την A.
2. Αν ο E είναι χώρος με νόρμα κι η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.
3. Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος κι $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A: E \to E$ έχει ιδιοτιμές.

Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.
Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

(1) $A: E \to E$ γραμμικός, $\lambda \in \mathbb{C}$, $M_\lambda = \{x \in E : Ax = \lambda x\} = Ker(A-\lambda I)$

Αν $B: E \to E$ γραμμικός με $BA = AB$, τότε $B(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ διότι

$\forall x \in M_\lambda$ έχουμε $Bx \in M_\lambda = ker(A-\lambda I)$ δηλαδή: $(A-\lambda I)(Bx) = 0$

Πράγματι, $(A-\lambda I)Bx = B\overbrace{(A-\lambda I)x}^{0} = 0$

Συμβολισμός: $\{A\}' := \{B: E \to E : AB = BA\}$ είναι άλγεβρα με $I_E \in \{A\}'$.

(3) Αν $E = \mathbb{R}^2$, $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}$ δεν έχει (πραγματικές) ιδιοτιμές
$\Rightarrow$ δεν έχει γν. αναλλ. υπόχωρους.

Όμως, αν $E = \mathbb{C}^2$, $A: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

πχ το $u = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή $(-i) = e^{-i\pi/2}$

Οπότε ο span$\{u\}$ είναι γνήσιος αναλλ. υπόχωρος.

·Παραδείγματα:

1. Στον χώρο ℓ^2 θεωρούμε τον τελεστή T όπου

$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$

Ο T είναι συμπαγής, δεν έχει όμως ιδιοτιμές.

2. Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή A όπου $(Af)(t) = t f(t)$, $f \in L^2([0,1])$. Ο A είναι αυτοσυζυγής, δεν έχει όμως ιδιοτιμές.

Και τα δύο μαζί; Αυτοσυζυγής ή συμπαγής;

(1) $T: \ell^2 \to \ell^2$, $T: (x(1), x(2), x(3), \dots) \to (0, x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots)$

$T: (x(1), x(2), x(3), \dots) \xrightarrow{S} (0, x(1), x(2), x(3), \dots) \xrightarrow{D_a} (0, \frac{x(1)}{1}, \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots)$

D_a διαγώνιος, $a(n) = \frac{1}{n-1}$, $n \geq 2$, $a(1) = i e^{\log 3}$

$T = D_a \circ S$. Επειδή $a(n) \to 0 \Rightarrow D_a$ συμπαγής $\Rightarrow T$ συμπαγής.

Τι θα πει $Tx = \lambda x$;

$(0, x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \dots) = (x(1), \lambda x(2), \lambda x(3), \dots) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x(1) = 0 \\ \lambda x(2) = x(1) \\ \lambda x(3) = \frac{x(2)}{2} \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(1) = 0 \\ \lambda x(2) = 0 \\ \lambda x(3) = \frac{x(2)}{2} \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Αν $\lambda \neq 0$ τότε $\forall x(n) = 0$. Αν $\lambda = 0$, πάλι κάθε $\frac{x(n)}{n} = 0 \Rightarrow x(n) = 0$

Άρα, T συμπαγής χωρίς ιδιοτιμές.

$T = D_a \circ S$: $T^* = S^* \circ D_a^* = S^* D_a$ αυτός έχει ιδιοτιμές (άσκηση).

(2) Στον $L^2([0,1])$, $A : (Af)(t) = t f(t)$, $f \in C([0,1])$. Ξέρουμε δείξει ότι επεκτείνεται σε φραγμένο κ' αυτοσυζυγή τελεστή.

$\exists ?\ \lambda \in \mathbb{C}$, $\exists ?\ f \neq 0$ στον L^2 : $(A - \lambda I) f = 0$ δηλ $(t-\lambda) f(t) = 0$

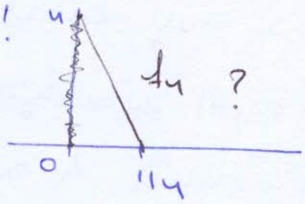
! αν f συνεχής, $\forall t \in [0,1] \Rightarrow f(t) = 0\ \forall t \neq \lambda \Rightarrow f(t) = 0\ \forall t \in [0,1]$ όχι ιδιοδιάνυσμα

π.χ. Πάρε $\lambda = 0$. Θέλουμε $f \neq 0$, $Af = 0$ δηλ $t f(t) = 0$.

Πρέπει $f(t) = 0\ \forall t \neq 0$ αλλά πρέπει $\|f\|_2 \neq 0$ δηλ $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \neq 0$.

Υποχρεωτικά, $f = $ "δ_0" δεν είναι συνάρτηση!

Μήπως $\exists (f_n)$ με $A f_n \to 0$;



Αν ξέραμε Θ. Μέτρου: Αν $f \in L^2$ ικανοποιεί $(A - \lambda) f = 0$ αυτό σημαίνει $(t - \lambda) f(t) = 0$ σχεδόν $\forall t$. Όμως, αφού $\{\lambda\}$ έχει μέτρο (εννοείται Lebesgue) μηδέν $\Rightarrow f(t) = 0$ σχεδόν $\forall t$ δηλ $\|f\|_2 = \int |f|^2 = 0$.

Άσκηση: Ν.δ.ο. $\sigma_p(A) = 0$ κ' ν.δ.ο. $\forall \lambda \in [0,1]$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A, δηλ $\exists (f_n)$ του L^2 με $\|f_n\|_2 = 1$ κ' $\|(A-\lambda) f_n\|_2 \to 0$.

• Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H κ' μια ακολουθία $a = \{a(n)\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $A x_n = a(n) x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $a = \{a(n)\}$ φραγμένη κ' $A = U^{-1} D_a U$: $A \overset{u}{\simeq} D_a$, όπου $U : H \to \ell^2 : x_n \to e_n$ είναι unitary. Άρα,

διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός.

Π: H: διαχωρίσιμος, $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος αν $\exists$ ΟΚ βάση (x_n) του H από ιδιοδιανύσματα του A : $\forall n\ \exists a(n) \in \mathbb{C}$: $A x_n = a(n) x_n$

Ισοδύναμα:

$$\begin{tikzcd} x_n \arrow[d] & H \arrow[r, "A"] \arrow[d, "U"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \arrow[d, "U"] & a(n) x_n \\ e_n & \ell^2 \arrow[r, "D_a"] & \ell^2 & a(n) e_n \end{tikzcd}$$

U ισομετρία επί

$A = U^{-1} D_a U$

$A \overset{u}{\simeq} D_a$ (unitary ισοδυναμία)

Ξέρουμε ότι $\forall D_a$ είναι φυσιολογικός διότι $D_a^* = D_{\bar{a}}$, άρα

$D_a^* D_a = D_{\bar{a}a} = D_{a\bar{a}} = D_a D_a^*$. Οπότε $A^*A = (U^{-1}D_aU)^*(U^{-1}D_aU)$

(δεδομένου ότι $U^* = U^{-1}$)

$= (U^*D_aU)^*(U^*D_aU) = (U^*D_a^*\underbrace{U)(U^*}_{I_n}D_aU) = U^*D_a^*D_aU = U^*D_aD_a^*U =$

$= U^*D_aUU^*D_a^*U = AA^*$.

Δείξαμε ότι: διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός

$\overset{?}{\Leftarrow}$ όχι βέβαια: $\exists$ φυσιολογικός (κάποια αντισυμμετρικός) χωρίς καθόλου ιδιοδιανύσματα

• Όταν dim H < ∞:

Θεώρημα (Φασματικό σε χώρους πεπερασμένης διάστασης)

· Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ όπου H Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Ο A είναι φυσιολογικός ανν είναι διαγωνοποιήσιμος.

•· Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$. Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, κ' είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Π. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός, $x \in H$ κ' $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $Tx = \lambda x \Rightarrow T^*x = \bar{\lambda}x$.

Απόδειξη: $(T-\lambda I)x = 0 \Rightarrow \|(T-\lambda I)x\| = 0$

$$\| \text{ T φυσιολογικός}$$

$$\|(T-\lambda I)^*x\|$$

Όμως $T_\lambda := T - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, δηλ $T_\lambda^* = T^* - \bar{\lambda}I$

Άρα $\|(T-\lambda I)^*x\| = \|(T^* - \bar{\lambda}I)x\| = 0$, δηλ $T^*x = \bar{\lambda}x$.

· Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός, τότε κάθε ιδιόχωρος M_λ του T, ανάγει τον T, δηλαδή αν $x \in M_\lambda^\perp$ τότε $Tx \in M_\lambda^\perp$.

Απόδειξη: $\forall y \in M_\lambda$: $\langle x, y\rangle = 0$. Τώρα, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overbrace{\bar{\lambda}y}^{\in M_\lambda}\rangle = 0$

Άρα $Tx \in M_\lambda^\perp$. Δηλαδή

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_\lambda & M_\lambda^\perp \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_{M_\lambda} & 0 \\ \hline 0 & \times \end{array}\right] \end{array}$$

· Αν T φυσιολογικός κ' $\lambda \neq \mu$ δύο ιδιοτιμές του, τότε οι M_λ κ' M_μ είναι κάθετοι.

Απόδειξη: Παίρε $x\in M_\lambda$, $y\in M_\mu$. Ανδο $\langle x,y\rangle=0$

· Έχουμε $\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x,y\rangle = \langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle \overset{\text{λήμμα}}{=} \langle x,\bar{\mu} y\rangle = \mu\langle x,y\rangle$

Αλλά $\lambda\neq\mu$ άρα $\langle x,y\rangle=0$.

Οπότε:

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_\lambda & M_\mu & (M_\lambda\oplus M_\mu)^\perp \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda I_{M_\lambda} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{M_\mu} & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \end{array}$$

• Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ' έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert H διάστασης $n<\infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k=1,\dots,n\}$ του H κ' $a_k\in\mathbb{C}$ ώστε $Te_k=a_k e_k$ $(k=1,\dots,n)$.
Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U: H\to\mathbb{C}^n$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Γ• Αν $\dim H=n<\infty$ κ' $T\in B(H)$ φυσιολογικός τότε διαγωνοποιείται (ως προς μια ορθοκανονική βάση).

Απόδειξη: Επειδή ο H είναι μιγαδικός χώρος, ο T έχει ιδιοτιμή είναι οι ρίζες του $p(\lambda)=\det(T-\lambda I)$, τις γράφουμε $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\}$ με $m\le\dim H$. Ξέρουμε ήδη ότι: 1. $\forall\, M_{\lambda_k}$ ανάγει τον T

2. $T|_{M_{\lambda_k}} = \lambda_k I_{M_{\lambda_k}}$, 3. $\{M_{\lambda_k}\}$ $\perp$ ανά δύο.

Θεωρούμε το $\bigoplus_{k=1}^{m} M_{\lambda_k} = H_0$. Ισχυριζόμαστε ότι $=H$.

Αφού κάθε M_{λ_k} ανάγει τον T, το $\bigoplus_{k=1}^{m} M_{\lambda_k}$ ανάγει τον T άρα ο $(H_0)^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος. Ορίζουμε $T_0:(H_0)^\perp\to(H_0)^\perp$ όπου $T_0=T|_{(H_0)^\perp}$ κ' επειδή $(H_0)^\perp$ έχει πεπερασμένη διάσταση, ο T_0 θα έχει ιδιοτιμή, δηλαδή θα $\exists\, x\in H_0^\perp,\ x\neq 0$ κ' $\lambda\in\mathbb{C}$: $\underset{\overset{\parallel}{Tx}}{T_0x}=\lambda x$
δηλ. το x είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ.
Οπότε $\lambda\in\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ πχ $\lambda=\lambda_k$. Οπότε $x\in M_{\lambda_k}$, αλλά $x\in H_0^\perp \Rightarrow x=0$ άτοπο.

Δείξαμε ότι αν $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ οι ιδιοτιμές του T, τότε $\bigoplus_{k=1}^{m} M_{\lambda_k} = H$.
Αλλά, $\forall k=1,\dots,m$, $T|_{M_{\lambda_k}} = \lambda_k I_{M_{\lambda_k}}$ οπότε $\forall$ ο.κ. βάση του M_{λ_k} τον διαγωνοποιεί. Διαλέγουμε μία $\forall \lambda_k$, οπότε θεωρώντας την ένωση των ο.κ. βάσεων των M_{λ_k} έχουμε μια ο.κ. βάση του H που διαγωνοποιεί τον T.

$$
\begin{array}{c}
\quad M_{\lambda_1} \quad M_{\lambda_2} \qquad\qquad M_{\lambda_m} \\
T \sim \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_1 & & & & & 0 \\
 & & \lambda_2 & 0 & & & \\
 & & 0 & \lambda_2 & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & 0 & & & & \lambda_m & 0 \\
 & & & & & 0 & \lambda_m
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\perp$

• Παραδείγματα: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής & 2π-περιοδική συνάρτηση.
Ορίζουμε $(K_f g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$. Ο K_f είναι ολοκληρωτικός τελεστής (με πυρήνα τη συνεχή συνάρτηση $K(x,y)=f(x-y)$.) Η $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ (όπου $e_n(x)=\exp inx$) είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([-\pi,\pi])$.
$K_f e_n = \hat{f}(n) e_n$ $(n\in\mathbb{Z})$. Επομένως, ο τελεστής K_f διαγωνοποιείται από την ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$.

⌈ (σε ∞-διάστατο χώρο) $L^2([-\pi,\pi])$ Έστω f: συνεχής & 2π-περιοδική.
Ορίζουμε $K_f: L^2\to L^2$ ως εξής: $\forall g\in C([-\pi,\pi])$: $(K_f g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy\,\frac{1}{2\pi}$
η συνάρτηση $h(x,y)=f(x-y)$ είναι συνεχής άρα ο K_f ορίζεται καλά &
έχουμε δείξει ότι είναι συμπαγής.
"Μαγικό κόλπο": Θέτουμε $g_n(x) = e^{inx}$ $(n\in\mathbb{Z})$. Έχουμε

$$(K_f g_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{iny}\frac{dy}{2\pi} \underset{=}{\overset{t=x-y}{=}} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(t)e^{inx}e^{-int}d(-t) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)e^{-int}dt\right)}_{\text{αριθμός}} e^{inx} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right) g_n(x).$$ Δείξαμε $K_f g_n = \hat{f}(n) g_n$

Ξέρουμε $\{g_n : n\in\mathbb{Z}\}$ είναι ο.κ. βάση του $L^2([-\pi,\pi])$ άρα ο K_f διαγωνοποιήθηκε.

• Το "μινι" Φ.Θ (Σχόλιο Καταβόλου)

H Hilbert, $\dim H < +\infty$, $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός δηλ. $T^*T = TT^*$, τότε οι ιδιόχωροι του $M_\lambda = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$ είναι $(\perp)$ ανά δύο κ' παράγουν τον H: $\bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} M_\lambda = H$, $\sigma_p(T)$ = σύνολο ιδιοτιμών του T, $\neq \emptyset$, πεπερ.

Προφανώς, $T|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$, αν $P_\lambda = P(M_\lambda)$ • $\{P_\lambda : \lambda \in \sigma_p(T)\}$ $\perp$ ανά δύο

• $\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} P_\lambda = I$ ⊗

Πολλ/ζω την ⊗ αριστερά με T

$\forall x \in H$: $TP_\lambda x = \lambda P_\lambda x$, $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$ άρα $T = T\left(\sum_\lambda P_\lambda\right) = \sum_\lambda TP_\lambda = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$

δηλαδή $\sum P_\lambda = I$, $\sum \lambda P_\lambda = T$

$T = \sum \lambda P_\lambda$: φασματική ανάλυση του T

• Αν H απειροδιάστατος, διαχωρίσιμος, T φυσιολογικός + συμπαγής, ισχύει $T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_{\lambda_i}$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του. (αν διαγράψω τη συμπάγεια, παύουν να ∃ ιδιοτιμές)

Γενικότερα: "H απειροδιάστατος, $T = T^* \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow T = \int \lambda \, dP_\lambda$". ⇝ Γενικό Φ.Θ.

Για τα επόμενα, βλ. nnspecth.pdf. ⊥

• Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο}\}$.

• Το $\sigma(A)$ φράσσεται από $\|A\|$: Αν $|\lambda| > \|A\|$, ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος κ' ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Γ. $A \in \mathcal{B}(E)$, E: χώρος Banach, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq \|A\|$ τότε ο $(A - \lambda I)$ έχει φραγμένο αντίστροφο.

Απόδειξη: Α.ν.δ.ο $(I-\frac{A}{\lambda})$ έχει φραγμ. αντίστροφο $\underset{\in(0,1)}{\text{φραγμένος}}$

$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$. $n>m$ τότε $\|S_n-S_m\|=\left\|\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k\right\|\le\sum_k\left\|\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k\right\|\le\sum_k\left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^k$

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\forall n>m\ge n_0$ $\sum_k\left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^k<\varepsilon$. Δείξαμε ότι (S_n) είναι βασική κ' ο $B(E)$ είναι πλήρης. $\exists S\in B(E):\|S_n-S\|\to0$

$S_n=I+T+\dots+T^n$

$+\ TS_n=T+T^2+\dots+T^{n+1}+\dots$

$TS_n-S_n=T^{n+1}-I \implies TS-S=\lim_n T^{n+1}-I\overset{\circledast}{=}I$

Όμως, $\|T\|<1$ άρα $\|T^{n+1}\|\le\|T\|^{n+1}\to0$ $\circledast$

Ομοίως, $ST-S=-I$, δηλαδή $(I-T)S=(T-I)S=I$

Δηλαδή $S=(I-T)^{-1}=(I-\frac{A}{\lambda})^{-1}=\lambda(\lambda I-A)^{-1}$

Άρα αν $|\lambda|>\|A\|$: $(\lambda I-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}S=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^k$ $\perp$

- Έστω $A\in B(E)$, όπου E χώρος Banach.

Ένα $\lambda\in\mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A (συμβ. $\lambda\in\sigma_p(A)$) αν $\exists x\in E\setminus\{0\}$ ώστε $(A-\lambda I)x=0$.

Το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A (συμβ $\lambda\in\sigma_a(A)$) αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)\subseteq E$ με $\|x_n\|=1$ ώστε $\|(A-\lambda I)x_n\|\to0$

Ισοδύναμα, $\lambda\notin\sigma_p(A)$ αν $\exists\delta>0:\|(A-\lambda I)x\|\ge\delta\|x\|\ \forall x\in E$.

Προφανώς, $\sigma_p(A)\subseteq\sigma_a(A)\subseteq\sigma(A)$.

- Έστω H Hilbert κ' $A\in B(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A)=\sigma_a(A)$.

Δηλαδή, αν το λ δεν είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, τότε ο $A-\lambda I$ έχει (φραγμ.) αντίστροφο.

Γ. $A\in B(H)$, $AA^*=A^*A$, $\lambda\notin\sigma_a(A)$ νδο $T:A-\lambda I$ έχει φρ. αντίστροφο.

→ $\lambda\notin\sigma_p(A)\implies T$ είναι 1-1

→ $T(H)$ πυκνό: Αν $y\perp T(H)$ τότε $\forall x\in H$ $\langle y,Tx\rangle=0$ δηλ $\langle T^*y,x\rangle=0\ \forall x$

άρα $T^*y = 0$. Τρισιολογικός: $\|Ty\| = \|T^*y\| = 0$ άρα $Ty = 0 \xRightarrow[1-1]{T} y = 0$

$H \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow T(H)$: $\exists S : T(H) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow H$ με $S(Tx) = x \ \forall x \in H$

Ισχυρισμός: S είναι φραγμένος.

Ξέρουμε ότι $\exists \delta > 0 : \forall x \ \|Ax - \lambda x\| \geq \delta \|x\|$ δηλ $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$ δηλ

$\|x\| \leq \frac{1}{\delta}\|Tx\|$. Άρα $\forall y \in T(H)$ έστω $y = Tx$ δηλ $Sy = x$ κ' έχουμε

$\|Sy\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta}\|Tx\| = \frac{1}{\delta}\|y\|$ άρα ο S φραγμ. $\|S\| \leq \frac{1}{\delta}$

Άρα ο S επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή $\tilde{S} : \overline{T(H)} \to H$ κ' ικανοποιεί
$\overline{T(H)} = H$

$\tilde{S}(Tx) = STx = x \ \forall x \in H$ κ' $T(\tilde{S}x) = x \ \forall x \in H$. ┘

- Έστω H Hilbert κ' $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε
  α. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$
  β. $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$
  γ. $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$

Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{0\}$, $\|A\| = 1$ (α, β)

$A = A^* \in \mathcal{B}(H)$
$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$
κ' επειδή
$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$

Όμως αν $A = A^*$, τότε ΘΔΟ $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$

Πρώτα ΝΔΟ αν $A = A^* \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ (οπότε $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$)

Έστω $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Τότε $\forall x \in H, x \neq 0$ $\quad 0 < |\lambda - \bar{\lambda}|\,\|x\|^2 = |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle (A - \bar{\lambda} I)x, x\rangle| =$

$= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A - \lambda I)x\rangle| \underset{\text{ανισ}}{\overset{\text{τριγ.}}{\leq}} |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle| + |\langle x, (A - \lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A - \lambda I)x\|\,\|x\|$

$\Rightarrow \|(A - \lambda I)x\| \geq \underbrace{\frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2}}_{\delta}\|x\| \Rightarrow \lambda \notin \sigma_a(A)$ (αφού A φυσιολογικός) $\Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$.

β. $A = A^*$ ΝΔΟ $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$

Ισχυρισμός: $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}$

[υπενθύμιση: $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : x, y \in B_H\} = \sup\{\phi_A(x, y) : x, y \in B_H\}$]

ΝΔΟ $= \sup\{\hat{\phi}(x) : x \in B_H\} := \|\hat{\varphi}\|$, όπου $\hat{\varphi}(x) = \langle Ax, x\rangle$.

\# $A = A^*$: $\hat{\varphi}(x) \in \mathbb{R} \ \forall x$

ἄρα $4\langle Ax,y\rangle = \underbrace{\hat\varphi(x+y)-\hat\varphi(x-y)}_{=4\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle}+i\hat\varphi(x+iy)-i\hat\varphi(x-iy)$

$\Rightarrow |4\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle| \le |\hat\varphi(x+y)|+|\hat\varphi(x-y)| \le \|\hat\varphi\|(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2) = \|\hat\varphi\|(2\|x\|^2+2\|y\|^2)\le$

αντικαθιστώντας y με $ye^{i\theta}=y'$ ώστε $|\langle Ax,y\rangle| = \mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle$ $\quad 4\|\hat\varphi\| \ \forall x,y\in B_H$.

Άρα, $\mathrm{Re}\langle Ax,y\rangle \le \|\hat\varphi\| \Rightarrow |\langle Ax,y\rangle|\le\|\hat\varphi\| \overset{\varphi}{\Rightarrow}$ άρα $\|A\|\le\|\hat\varphi\|$. ☒

$\|A\| = \sup\{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\|=1\}$ οπότε $\exists (x_n), \|x_n\|=1 : |\langle Ax_n,x_n\rangle| \to \|A\|$.

$(\langle Ax_n,x_n\rangle)$ φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία έστω την $\langle Ay_n,y_n\rangle$. Θέτουμε $\lambda = \lim_n \langle Ay_n,y_n\rangle$.

Ισχυρισμός: $\lambda\in\sigma_a(A)$.

Πράξεις: $\|Ay_n-\lambda y_n\|^2 = \langle Ay_n,Ay_n\rangle - \langle Ay_n,\lambda y_n\rangle - \langle\lambda y_n, Ay_n\rangle + \langle\lambda y_n,\lambda y_n\rangle =$

$= \|Ay_n\|^2 - 2\lambda\underbrace{\langle Ay_n,y_n\rangle}_{\to\lambda} + \lambda^2\underbrace{\|y_n\|^2}_{=1} \le \|A\|^2 - 2\lambda\langle Ay_n,y_n\rangle+\lambda^2 \to 0$ αφού $|\lambda|=\|A\|$ ⊣

• Αν $A\in\mathcal{K}(H)$ είναι φυσιολογικός, τότε κάθε $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\}$ είναι ιδιοτιμή

(Ισχύει για κάθε συμπαγή: δες αργότερα)

· Αν A συμπαγής + κανονικός και αν $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\} \Rightarrow \lambda\in\sigma_p(A)$

$\lambda\in\sigma(A)$ και A κανονικός ξέρουμε ότι $\lambda\in\sigma_a(A)$. $\Rightarrow \exists y_n : \|y_n\|=1 : \|(A-\lambda I)y_n\|\to 0$

Όμως, A συμπαγής, (y_n) φραγμένη $\Rightarrow (Ay_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία έστω την Az_n (λόγω συμπάγειας). Θέτουμε $w := \lim Az_n$.

Ισχυρισμός: $Aw=\lambda w$.

$\lim_n(Az_n-\lambda z_n)=0$ και $\lim(Az_n-w)=0$ $\Rightarrow \lim_n \lambda z_n = w \xRightarrow[\text{φραγ.}]{A} \lim_n(A\lambda z_n)=Aw$

Αλλά, $\lim_n(A\lambda z_n)=\lambda\lim Az_n=\lambda w$, δηλαδή $Aw=\lambda w$.

Πρέπει νδο $w\neq 0$. Ξέρουμε ότι $w=\lim_n\lambda z_n=\lambda\lim z_n\neq 0$ διότι $\lambda\neq 0$ και $\|z_n\|=1$.

#Αν $T\in\mathcal{K}(H)$ (συμπαγής) σε $\dim H=\infty \Rightarrow 0\in\sigma(T)$

Αλλιώς, ο T^{-1} θα ήταν φραγμένος $\Rightarrow T^{-1}T$ θα ήταν συμπαγής. Όμως, $T^{-1}T=I\in\mathcal{K}(H)$ ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ, όταν $\dim H=\infty$.

Όμως, $\exists T\in\mathcal{K}(H)$ που είναι 1-1 π.χ. $T=D_a$ με $a(n)\neq 0\ \forall n$ και $a\in c_0$ ⊣

• Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ κ' $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Γ. Αν $A = A^*$ κ' συμπαγής $\Rightarrow \exists \lambda \in \sigma_p(A)$ με $\|A\| = |\lambda|$. (οπότε $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$
$= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$)

Αφού $A = A^*$ έχουμε δείξει ότι $\exists \lambda \in \sigma_a(A) : |\lambda| = \|A\|$.

Αλλά τότε, $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ οπότε $\lambda \in \sigma_p(A)$. ⊣

• Παράδειγμα: Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$

\# Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.

• Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.

1. Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.

2. Αν $\{x_n\}$ είναι άπειρη ορθοκανονική ακολουθία κ' υπάρχουν $\lambda_n \in \mathbb{C}$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{\lambda_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία.

3. Αν ο A είναι φυσιολογικός, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Γ

1. $A \in \mathcal{K}(H)$, $\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}$. Ισχυρισμός: M_λ πεπερασμένης διάστασης.

$A|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$ άρα $I_{M_\lambda} = \frac{1}{\lambda} A|_{M_\lambda}$ συμπαγής (γιατί A συμπαγής) άρα $\dim M_\lambda < +\infty$.

2. $A \in \mathcal{K}(H)$, $\{x_n\}$ ok ακολουθία κ' $\forall n\ \exists \lambda_n \in \mathbb{C} : Ax_n = \lambda_n x_n \Rightarrow \lambda_n \to 0$.

$\langle Ax_n, x_n \rangle = \lambda_n \langle x_n, x_n \rangle = \lambda_n$ κ' $\langle Ax_n, x_n \rangle \to 0$ διότι A συμπαγής.

3. A συμπαγής + φυσιολογικός $\Rightarrow \sigma_p(A)$ ή πεπερασμένο ή αποτελεί μηδενική ακολουθία

Αν $\sigma_p(A)$ άπειρο κ' όχι μηδενική ακολουθία, τότε $\exists \delta > 0$ κ' $\exists$ άπειρα λ_n όπου $\lambda_n \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda_n| \geq \delta$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_n \neq \lambda_m$.

$\forall n\ \exists x_n$ με $\|x_n\| = 1 : Ax_n = \lambda_n x_n$

Αλλά, A φυσιολογικός $\Rightarrow$ διαφορετικοί ιδιόχωροι είναι $\perp$ μεταξύ τους.

άρα, (x_n) είναι ορθοκανονική κ' από το (2), $\lambda_n \to 0$.

άτοπο

εκ' κατασκευής.