$$\left(\frac{\|Df_n\|_2}{\|f_n\|_2}\right)^2 = \frac{n^2}{2n-1}(2n+1) \Rightarrow \frac{\|Df_n\|_2}{\|f_n\|_2} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$ όχι φραγμένη

Οπότε $\nexists M : \|Df\|_2 \leq M\|f\|_2 \ \forall f.$

Θα έπρεπε $M \geq n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$. Άτοπο.

Άρα ο D ΔΕΝ είναι $\|\cdot\|_2$-φραγμένος, άρα ΔΕΝ επεκτείνεται σε συνεχή $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Σχόλιο: Σχέση τελεστή μετατόπισης με τελεστή παραγώγισης:

$\lambda_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ με $(\lambda_t f)(s) = f(s-t)$: ισομετρία

$D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$: μη φραγμένος.

Ισχυρισμός: " $\lambda_t = e^{-tD}$ "

"Απόδειξη": Πάρε μια πολύ καλή συνάρτηση f (πχ. $f(x) = p(x)e^{-x^2}$, p: πολυώνυμο) και γράψε το Θ. Taylor:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$ Βάλε $x = s-t$ και $x_0 = s$:

$$\lambda_t f(s) = f(s-t) = f(s) + f'(s)(s-t-s) + \dots + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(-t)^n + \dots =$$

$$= f(s) + (-t)Df(s) + \frac{(-t)^2}{2!}D^2 f(s) + \dots + \frac{(-t)^n}{n!}D^n f(s) + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} D^k f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tD)^k}{k!} f(s) \quad (\text{αν } \exists \text{ το } \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}).$$

Δηλαδή " $\lambda_t f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tD)^k}{k!} f = e^{-tD} f$ " (πχ f πολυώνυμο)

" " $\lambda_t = e^{-tD} \ \forall t \in \mathbb{R}$ " " $\quad \frac{\lambda_t - \lambda_0}{t-0} = \frac{e^{-tD} - e^0}{t-0}$

"" $\lim_{t\to 0} \frac{\lambda_t - \lambda_0}{t-0} = -D$ "" $\quad \lambda_t = e^{-tD} \Rightarrow (\lambda_t)' = -D\lambda_t$. $\left.\frac{d}{dt}\lambda_t\right|_{t=0} = -D$

$\mathbb{R} \to$ τελεστές
$t \mapsto \lambda_t$

[ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ μη φραγμένοι τελεστές]. όλα αυτά επιδέχονται αυστηρές αποδείξεις!!

• Αν $(E,\|\cdot\|)$, $(F,\|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E,F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : (E,\|\cdot\|) \to (F,\|\cdot\|)$.

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E,E)$.

Με γραμμικές πράξεις κατά σημείο, δηλ. $(T+\lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx)$, $x \in E$, το σύνολο $\mathcal{B}(E,F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

• Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E,F)$. Αν επιπλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E,F)$ είναι χώρος Banach.

Όταν $E=F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E>1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$, $x \in E$. Μάλιστα, $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

Ο χώρος των τελεστών $\{T : (E,\|\cdot\|) \to (F,\|\cdot\|)$ γραμμικός κ' φραγμένος$\}$

$\mathcal{B}(E,F) = \{T: E \to F$ γραμμ, φραγμ$\}$ δηλ $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in B_E\} < +\infty$.

↳ γραμμικός χώρος με πράξεις κατά σημείο, δηλ αν $T, S \in \mathcal{B}(E,F)$

ορίζουμε $T+S : x \mapsto Tx + Sx$ Η $T+S$ προφανώς γραμμ απεικόνιση

$\|T+S\| < +\infty$?

$\forall x \in E$ $\|(T+S)(x)\|_F \stackrel{ορ.}{=} \|Tx+Sx\|_F \leq \|Tx\|_F + \|Sx\|_F \underset{φρ.}{\overset{T,S}{\leq}} \|T\|\,\|x\|_E + \|S\|\,\|x\|_E$

Δηλ $\forall x \in E$ $\|(T+S)x\|_F \leq (\|T\|+\|S\|)\|x\|_E$. Άρα $T+S \in \mathcal{B}(E,F)$ κ' μάλιστα

$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$. Επίσης, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ορίζουμε $\lambda T : x \mapsto \lambda(Tx)$ προφανώς

γραμμ. κ' φραγμένος. $\|(\lambda T)x\|_F = |\lambda|\,\|Tx\|_F$ $\forall x \in E$

$\Rightarrow \|\lambda T\| := \sup\{\|(\lambda T)(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\} = \sup\{|\lambda|\,\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} =$

$= |\lambda| \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} = |\lambda|\,\|T\| < +\infty$. Δηλ $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$.

Οπότε έχουμε: 1. $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$

2. $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$

Ισχ. 3. $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

Πράγματι, ξέρουμε από (1) ότι $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$ $\forall x \in E$. Άρα αν $\|T\|=0$, τότε $Tx = 0$ $\forall x$, δηλ $T=0$. κ' το αντίστροφο είναι προφανές.

Άρα, $(\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα.

Αν $(F,\|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, τότε $(\mathcal{B}(E,F),\|\cdot\|)$ είναι Banach.

Έστω (T_n) στο $\mathcal{B}(E,F)$ βασική. $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0 : \forall n,m \geq n_0$ $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$.

Θέλουμε να βρούμε $T \in \mathcal{B}(E,F)$: $\|T_n - T\| \to 0$.

Σταθεροποιούμε $x \in E$: $(T_n x)$ ακολουθία από στοιχεία του F

$\|T_n x - T_m x\|_F \leq \|T_n - T_m\|\,\|x\|_E \Rightarrow (T_n x)$ βασική στον $\|\cdot\|_F$

F πλήρης, οπότε $\exists \underset{=y(x)}{y} \in F$: $\|T_n x - y(x)\|_F \xrightarrow{n\to\infty} 0$ δηλ $y(x) = \lim_n T_n x$ $\forall x \in E$

$E \to F$ καλά ορισμένη
$x \mapsto y(x)$

• $x \mapsto y(x)$ γραμμική διότι είναι (κατα σημείο) όριο γραμμικών απεικονίσεων

Δηλαδή: $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ $y(x_1) = \lim_n T_n(x_1)$, $\lambda y(x_2) = \lim_n \lambda T_n(x_2)$

$$y(x_1) + \lambda y(x_2) = \lim_n T_n(x_1) + \lim_n \lambda T_n(x_2) = \lim_n (T_n(x_1) + \lambda T_n(x_2)) = \lim_n (T_n(x_1+\lambda x_2)) =$$
T_n γραμμ.
$$= y(x_1 + \lambda x_2).$$

• $x \mapsto y(x)$ φραγμένη: $\forall x \in E$ $\|y(x)\| = \|\lim_n T_n(x)\|$

Όμως, $\forall$ $\|T_n(x)\| \le \|T_n\| \|x\|$ και (T_n) βασική στο $\mathcal{B}(E,F)$ άρα φραγμένη

$\exists M < +\infty$: $\|T_n\| \le M$ $\forall n$ Άρα $\|T_n x\| \le \|T_n\| \|x\| \le M\|x\|$ $\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}$.

Οπότε $\|y(x)\| \le M\|x\|$ $\forall x \in E$, άρα $x \mapsto y(x)$ είναι φραγμ., γραμμ και την

ονομάζω T.

Μένει ν.δ.ο. $\|T_n - T\| \to 0$. Ξέρουμε ότι $\forall x$ $\|T_n x - Tx\|_F \to 0$

Θυμάμαι πάλι: $\exists n_0$ $\forall n, m \ge n_0$ $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$.

Οπότε $\forall x \in E$ $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|$. Σταθεροποιούμε ένα $\underline{n} \ge n_0$ και

αφήνουμε το $m \to \infty$. Έχουμε $\forall x \in E$ $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon\|x\|$.

$\forall n \ge n_0$ $\|T_n - T\| = \sup\{\|T_n x - Tx\| : x \in B_E\} \le \varepsilon$.

Δείξαμε ότι $T_n \xrightarrow[\mathcal{B}(E,F)]{\|\cdot\| \text{ στο}} T$. πχ $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{B}(E,F) =$ τοπολογικός δυϊκός του E, είναι πλήρης

Σύνθεση: $S \circ T : E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ T, S γραμμικές

$ST = S \circ T : E \to G$ γραμμική.

Ισχυρισμός: Αν S, T φραγμένες $\Rightarrow ST$ φραγμένος τελεστής με $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$

$\forall x \in E$ $\|ST(x)\|_G = \|S(Tx)\|_G \overset{S \text{ φρ.}}{\le} \|S\| \|Tx\|_F \overset{T \text{ φρ.}}{\le} \|S\| \|T\| \|x\|_E$. Δηλαδή

$\|ST(x)\|_G \le (\|S\| \cdot \|T\|) \|x\|_E$ $\forall x$ $\Rightarrow \|ST\| \le \|S\| \cdot \|T\|$.

• Να δείξουμε το θεώρημα: Αν H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert και $T: H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^*: H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1}$ $\forall x \in H_1, y \in H_2$.

Ο $T^*: H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής του T. Είναι φραγμένος τελεστής κ' $\|T^*\| = \|T\|$.

Παραδείγματα:

1. Αν $H_1 = H_2 = \ell^2(n)$ κ' ο T έχει πίνακα $[a_{ij}]$, ο T^* είναι ο τελεστής που έχει πίνακα $[b_{ij}]$, όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

┌ $H = \ell^2(n) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$, $\{e_i : i=1,..,n\}$ η συνηθισμένη βάση.

$T \sim [a_{ij}] : a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$.

Ορίζουμε $S \sim [b_{ij}]$, όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

$b_{ij} = \langle Se_j, e_i \rangle = \overline{a_{ji}} \Leftrightarrow a_{ji} = \overline{\langle Se_j, e_i \rangle} = \langle e_i, Se_j \rangle \Leftrightarrow a_{ij} = \langle e_j, Se_i \rangle$

Άρα, $\langle e_j, Se_i \rangle = \langle Te_j, e_i \rangle \ \forall i,j = 1,..,n$

$\Downarrow$ $\{e_i\}$ βάση $\to x = \sum_{j=1}^{n} x(j) e_j, \ y = \sum_{i=1}^{n} y(i) e_i$

$\langle x, Sy \rangle = \langle Tx, y \rangle \ \forall x, y \in H$. ┘

2. Αν $H_1 = H_2 = \ell^2$ κ' $a \in \ell^\infty$, ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (δηλ. $b(n) = \overline{a(n)} \ \forall n$)

┌ $D_a e_n = a(n) e_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνήθης βάση

Ισχυρισμός: Ο D_a^* ορίζεται κ' $= D_b$, όπου $b = (\overline{a(n)})$.

$b \in \ell^\infty$ κ' μάλιστα $\|b\|_\infty = \|a\|_\infty$. Άρα ο D_b ορίζεται κ' είναι φραγμένος

$\Rightarrow \langle D_b x, y \rangle \overset{\sum_n b(n)x(n)\overline{y(n)}}{=} \sum_{b(n)=\overline{a(n)}} (\overline{a(n)} x(n)) \overline{y(n)} = \sum_n x(n) \overline{a(n) y(n)} = \langle x, D_a y \rangle$. ┘

3. Αν $H_1 = H_2 = L^2([0,1])$ κ' $f \in C([0,1])$, ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_{f^*} = M_f^*$.

┌ $H = L^2([a,b])$, $f \in C([a,b])$ - Έχουμε ορίσει $M_f : L^2 \to L^2$, $g \mapsto fg$ όταν g συνεχής.

Ισχ. $\exists (M_f)^* = M_h$, όπου $h(t) = \overline{f(t)} \ \forall t$

Παρατηρούμε ότι η $h \in C([a,b])$. Άρα ο M_h ορίζεται κ' είναι φραγμένος

Θέλουμε να δείξουμε $\langle M_h \xi, \eta \rangle = \langle \xi, M_f \eta \rangle \ \forall \xi, \eta \in L^2$.

$$\langle M_h \xi, \eta\rangle = \int_a^b (M_h\xi)(t)\,\overline{\eta(t)}\,dt = \int_a^b h(t)\,\xi(t)\,\overline{\eta(t)}\,dt = \int_a^b \overline{f(t)}\,\xi(t)\,\overline{\eta(t)}\,dt =$$

όταν ξ,η συνεχείς

$$= \int_a^b \xi(t)\,\overline{f(t)\eta(t)}\,dt = \int_a^b \xi(t)\,\overline{(M_f\eta(t))}\,dt = \langle \xi, M_f\eta\rangle \quad \forall \xi,\eta\in C([a,b])$$

Επειδή ο $C([a,b])$ πυκνός στον $L^2[a,b]$ κ' M_f, M_h φραγμ.

$$\Longrightarrow \quad \langle M_h\xi,\eta\rangle = \langle \xi, M_f\eta\rangle \quad \forall\, \xi,\eta\in L^2([a,b]).$$

Πχ. Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ ορίσαμε $Ue_n = e_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$. Ισχυριζόμαστε ότι ο συζυγής του ορίζεται κ' ικανοποιεί $U^*e_n = e_{n-1}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

Αποδ. Παρατηρούμε ότι $\exists!$ γρ. κ' φρ. τελεστής $T:\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$ τ.ω $Te_n = e_{n-1}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ (τον λέγαμε U^*. Τώρα θα εξηγήσουμε γιατί τον λέγαμε έτσι)

Έχουμε: $\forall n,m\in\mathbb{Z}$ $\langle e_n, Ue_m\rangle = \langle e_n, e_{m+1}\rangle = \langle e_{n-1}, e_m\rangle$

(διότι : $\delta_{n,m+1}$ κ' $\delta_{n-1,m}$ είναι ίσα.)

Άρα, $\langle e_n, Ue_m\rangle = \langle e_{n-1}, e_m\rangle = \langle Te_n, e_m\rangle$ $\forall n,m\in\mathbb{Z}$

διότι U, T γρ. κ' φρ. κ' $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ ορθ. βάση

$$\Longrightarrow \quad \langle x, Uy\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x,y\in \ell^2(\mathbb{Z})$$

Άρα πράγματι, $T = U^*$.

$\perp$

• Μια απεικόνιση $\phi: H_1\times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες:

1. Είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y\in H_2$ η απεικόνιση $x\mapsto \varphi(x,y): H_1\to\mathbb{C}$ είναι γραμμική.
   $f(x) = \varphi(x,y)$, $f: H_1\to\mathbb{C}$
2. Είναι αντιγραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x\in H_1$ η απεικόνιση $y\mapsto \overline{\varphi(x,y)}: H_2\to\mathbb{C}$ είναι γραμμική.
   $f(y) = \overline{\varphi(x,y)}$, $f: H_2\to\mathbb{C}$.

Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα:

3. $\sup\{|\varphi(x,y)| : \|x\|_{H_1}\le 1,\ \|y\|_{H_2}\le 1\} := \|\varphi\| < +\infty$.

Παράδειγμα: $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Μάλιστα, $\|T\| = \|\varphi\|$, δηλαδή $\|T\| = \sup\{|\langle Tx,y\rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}$.

⌈ $T: H_1 \to H_2$ γρ. κ φρ. Ορίζουμε $\varphi_T : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$
$(x,y) \mapsto \langle Tx, y\rangle$.

- $\forall y \in H_2$ η $x \mapsto \langle Tx, y\rangle : H_1 \to \mathbb{C}$ γραμμική διότι $x \xrightarrow{\text{γρ.}} Tx \xrightarrow{\text{γρ.}} \langle Tx, y\rangle$
- $\forall x \in H_1$ η $y \mapsto \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle$ γραμμική $: H_2 \to \mathbb{C}$.
- Είναι φραγμένη διότι $|\varphi_T(x,y)| = |\langle Tx,y\rangle| \overset{C-S}{\leq} \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$.

$\Rightarrow \|\varphi_T\| = \sup\{|\varphi_T(x,y)| : x \in H_1, y \in H_2\} \leq \|T\|$.

Από την άλλη, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_{H_1}\}$. Όμως, $\forall z \in H_2$:
$\|z\| = \sup\{|\langle z, y\rangle| : y \in B_{H_2}\}$. Άρα $\|T\| = \sup\{|\langle Tx,y\rangle| : x \in B_{H_1}, y \in B_{H_2}\} = \|\varphi_T\|$ ⌋

- Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση $\phi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ $\forall x \in H_1, y \in H_2$.

⌈ Σταθεροποιούμε ένα $x \in H_1$. Θέλουμε να βρούμε $Tx \in H_2$: $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ $\forall y \in H_2$. Ισοδύναμα, $\forall y \in H_2$ $\langle y, Tx\rangle = \overline{\varphi(x,y)}$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f : H_2 \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \overline{\varphi(x,y)}$ είναι γραμμική κ φραγμένη διότι $|f(y)| \overset{\text{"}|\varphi(x,y)|}{=} |\varphi(x,y)| \leq (\|\varphi\| \|x\|) \|y\|$ $\forall y \in H_2$ (διότι εξ' ορισμού $|\varphi(\xi,\eta)| \leq \|\varphi\|$ $\forall \xi \in B_{H_1}, \forall \eta \in B_{H_2}$) οπότε $\forall (x,y) \in H_1 \times H_2$ (εκτός από 0) $\xi = \frac{x}{\|x\|}$, $\eta = \frac{y}{\|y\|}$
$\left|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| \leq \|\varphi\|$ αλλά $\left|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right| = \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} |\varphi(x,y)|$, δηλαδή
$\frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} |\varphi(x,y)| \leq \|\varphi\|$ άρα $|\varphi(x,y)| \leq \|\varphi\| \|x\| \|y\|$ $\forall x \neq 0, x \in H_1$
$\forall y \neq 0, y \in H_2$
κ φυσικά κ για $x = 0$ ή $y = 0$.

Σταθεροποιούμε $x \in H_1$. $f : H_2 \to \mathbb{C}$: $y \mapsto \overline{\varphi(x,y)}$
f γραμμική : $|f(y)| \leq (\|\varphi\| \|x\|) \|y\|$ $\forall y \in H_2$. Όμως : H_2 Hilbert άρα από Riesz $\exists! \tilde{x} \in H_2$: $f(y) = \langle y, \tilde{x}\rangle$ $\forall y \in H_2$. Δηλ $\langle y, \tilde{x}\rangle = \overline{\varphi(x,y)}$ δηλ $\langle \tilde{x}, y\rangle = \varphi(x,y)$ $\forall y \in H_2$ $\forall x \in H_1$.

Έχουμε ότι $\forall x\in H_1\ \exists!\ \tilde{x}\in H_2 : \langle \tilde{x}, y\rangle = \varphi(x,y)\ \forall y\in H_2$

Οπότε $\begin{array}{l} H_1 \to H_2 \\ x \mapsto \tilde{x}\end{array}$ είναι (i) γραμμική: $x_1, x_2 \in H_1$, $\lambda\in\mathbb{C}$ τότε

$$\langle \widetilde{x_1+\lambda x_2}, y\rangle = \varphi(x_1+\lambda x_2, y) \underset{\text{γραμ}}{\overset{\varphi(\cdot,y)}{=\!=}} \varphi(x_1,y) + \lambda\varphi(x_2,y) = \langle \tilde{x}_1, y\rangle + \lambda\langle \tilde{x}_2, y\rangle =$$

$$= \langle \tilde{x}_1 + \lambda\tilde{x}_2, y\rangle\ \forall y\in H_2 \Rightarrow \widetilde{x_1+\lambda x_2} = \tilde{x}_1 + \lambda\tilde{x}_2$$

(ii) $x\to\tilde{x}$ φραγμένη: $\forall y\in H_2\ |\langle\tilde{x},y\rangle| = |\varphi(x,y)| \le (\|\varphi\|\|x\|)\|y\|$ άρα παίρνοντας sup ως προς $y\in B_{H_2}$ έχουμε $\|\tilde{x}\| = \sup\{|\langle\tilde{x},y\rangle| : y\in B_{H_2}\} \le \|\varphi\|\|x\|\ \forall x\in H_1$

Άρα, $x\to\tilde{x}$ είναι γραμμική κ' φραγμένη. Θέτουμε $\begin{array}{l} T: H_1\to H_2 \\ x\mapsto \tilde{x}\end{array}$ γραμμ. κ' φραγμένο κ' $\|T\|\le\|\varphi\|$. (1)

Έχουμε $\langle Tx, y\rangle_2 = \varphi(x,y)\ \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$. Από την άλλη, $\forall x\in B_{H_1}, \forall y\in B_{H_2}$

$|\varphi(x,y)| = |\langle Tx,y\rangle| \le \|Tx\|\|y\| \le \|T\|\|x\|\|y\| \le \|T\|$. Άρα,

$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x,y)| : x\in B_{H_1}, y\in B_{H_2}\} \le \|T\|$ (2). Από (1) κ (2) έχουμε $\|\varphi\| = \|T\|$.

Μοναδικότητα: Αν $S: H_1\to H_2$ ικανοποιεί $\forall x,y\ \langle Sx,y\rangle = \varphi(x,y) = \langle Tx,y\rangle$ $\overset{\forall y\in H_2}{\Longrightarrow} Sx = Tx\ \forall x\in H_1 \Rightarrow S = T.$ ⊥

· Έπεται το Θεώρημα: Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert κ' $T: H_1\to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^*: H_2\to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση $\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1}\ \forall x\in H_1, y\in H_2$.

Ο T^* είναι φραγμένος κ' $\|T^*\| = \|T\|$.

tip: Αποδ. ⇝ Η $\varphi(x,y) := \langle y, Tx\rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear κ' φραγμένη.

Γ $\forall\ T: H_1\to H_2$ γρ. κ' φρ $\exists!\ T^*: H_2\to H_1$ γρ κ' φρ ώστε $\langle T^*y, x\rangle_1 = \langle y, Tx\rangle_2\ \forall x\in H_1, y\in H_2$

Αποδ: Θεωρούμε την $\varphi(y,x) := \langle y, Tx\rangle_2$. Παρατηρούμε ότι είναι γραμμική ως προς y κ' αντιγραμμική ως προς x (T γραμμ.) κ'

$|\varphi(y,x)| \le \|y\|\|Tx\| \overset{T\varphi\rho.}{\le} \|y\|\|T\|\|x\|$ άρα $\|\varphi\|\le\|T\|$.

Οπότε $\exists!\ T^*: H_2\to H_1$ με $\langle T^*y, x\rangle = \varphi(y,x) = \langle y, Tx\rangle\ \forall x\in H_1, \forall y\in H_2$. ⊥

· Ταυτότητα πολικότητας (polarization): Αν $\varphi: H\times H\to\mathbb{C}$ sesquilinear κ' $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \tilde{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \tilde{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\tilde{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\tilde{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right)$$

Αν $\varphi : H\times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear, η $\hat{\varphi}: H\to\mathbb{C}$ τετραγωνική ορίζεται:

$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$.

$$\left.\begin{aligned} \hat{\varphi}(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)+\varphi(y,y) \\ -\hat{\varphi}(x-y) &= -\varphi(x-y,x-y) = -\varphi(x,x)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)-\varphi(y,y) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow \hat{\varphi}(x+y)-\hat{\varphi}(x-y) = 2\varphi(x,y)+2\varphi(y,x)$ κ'

$i(\hat{\varphi}(x+iy)-\hat{\varphi}(x-iy)) = 2i\varphi(x,iy)+2i\varphi(iy,x) = -2i^2\varphi(x,y)+2i^2\varphi(y,x) =$

$= 2\varphi(x,y)-2\varphi(y,x)$

$\Rightarrow \hat{\varphi}(x+y)-\hat{\varphi}(x-y)+i\hat{\varphi}(x+iy)-i\hat{\varphi}(x-iy) = 4\varphi(x,y)+0$. Polarization.

• Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη αν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H. Μάλιστα, $\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x\in B_H\} \le \|\varphi\| \le 2\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x\in B_H\}$. Αν $\varphi(x,x)\in\mathbb{R}\ \forall x\in H$, τότε ισχύει ισότητα. ...αλλά όχι εν γένει.

$T: H\to H$ γραμ. Ονομάζουμε $m(T) = \sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in B_H\}$.

Ισχ. T φραγμ. $\Leftrightarrow m(T)<+\infty$ κ' μάλιστα $m(T)\le\|T\|\le 2m(T)$.

Προφανώς, $m(T)\le \sup\{|\langle Tx,y\rangle| : x,y\in B_H\} = \|T\|$. Θδο $\|T\|\le 2m(T)$.

Θέτουμε $\varphi(x,y) = \langle Tx,y\rangle$ κ' $\hat{\varphi}(x) = \langle Tx,x\rangle$ οπότε $|\hat{\varphi}(x)|\le m(T)\|x\|^2$.

Polarization: $4|\varphi(x,y)| \le |\hat{\varphi}(x+y)|+|\hat{\varphi}(x-y)|+|\hat{\varphi}(x+iy)|+|\hat{\varphi}(x-iy)| \le$

$\le m(T)\left[\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+\|x+iy\|^2+\|x-iy\|^2\right] \underset{(\#)}{\overset{\text{κανόνας}}{=}} m(T)\left[2\|x\|^2+2\|y\|^2+2\|x\|^2+2\|iy\|^2\right]$

$\Rightarrow |\varphi(x,y)|\le m(T)\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, όπου $x,y\in B_H$. $\le 2m(T)$

Άρα $\|T\| = \|\varphi\| \le 2m(T)$.

$\#_1!$: Αν $S,T\in\mathcal{B}(H)$ ικανοποιούν $\langle Sx,x\rangle = \langle Tx,x\rangle\ \forall x\in H$

$\overset{\text{polar}}{\Longrightarrow} \langle Sx,y\rangle = \langle Tx,y\rangle\ \forall x,y\in H \Rightarrow S=T$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ!

πχ. $H = (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ T: στροφή κατά $\pi/2$, $\langle Tx,x\rangle = 0\ \forall x$

Ο T στρίβει το διάνυσμα (x,y) κατά μια ορθή γωνία. Άρα $T(x,y)\perp(x,y)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ ενώ, $T\ne 0$.

#2. $\sup\limits_{x\in B_H}|\langle Tx,x\rangle| \le \sup\limits_{x,y\in B_H}|\langle Tx,y\rangle| \le 2\sup\limits_{x\in B_H}|\langle Tx,x\rangle|$

$\|T\|$ βέλτιστες

πχ. $H=\mathbb{C}^2$ $T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_1\end{bmatrix}$

δηλ $T\simeq\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\|T\|=1$ προφανώς.

$\langle Tx,x\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}0\\x_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\rangle=x_1\overline{x_2} \Rightarrow \sup\{|\langle Tx,x\rangle| : |x_1|^2+|x_2|^2\le 1\}=$

$=\sup\{|x_1\overline{x_2}| : |x_1|^2+|x_2|^2\le 1\}=\frac{1}{2}$ διότι $2ab\le a^2+b^2$ $\lrcorner$

- Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T:H\to H$ είναι φραγμένη ανν $\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in H, \|x\|\le 1\}<+\infty$. Τότε, $\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in B_H\}\le\|T\|\le 2\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in B_H\}$. Επίσης, αν $T,S\in\mathcal{B}(H)$ τότε $T=S$ ανν $\langle Tx,x\rangle=\langle Sx,x\rangle$ $\forall x\in H$.

- Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert κ' $T:H\to H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $\langle Tx,x\rangle\in\mathbb{R}$ $\forall x\in H$, τότε $\|T\|=\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in B_H\}$.

- $T\in\mathcal{B}(H)$ λέγεται αυτοσυζυγής όταν $T=T^*$ δηλ όταν $\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$ $\forall x,y\in H$

- Όταν T αυτοσυζυγής, τότε $\|T\|=\sup\{|\langle Tx,x\rangle| : x\in B_H\}$

Αποδ. $\leadsto$ $\varphi(x,y)=\langle Tx,y\rangle$, $\hat\varphi(x)=\langle Tx,x\rangle$.

\# $\hat\varphi(x)\in\mathbb{R}$ $\forall x$ διότι $\overline{\hat\varphi(x)}=\overline{\langle Tx,x\rangle}=\langle x,Tx\rangle=\langle T^*x,x\rangle=\langle Tx,x\rangle$.

Οπότε από τη σχέση $4\varphi(x,y)=\hat\varphi(x+y)-\hat\varphi(x-y)+i(\hat\varphi(x+iy)-\hat\varphi(x-iy))$ έχουμε $4\mathrm{Re}\varphi(x,y)=\hat\varphi(x+y)-\hat\varphi(x-y)$.

$4|\mathrm{Re}\varphi(x,y)|\le|\hat\varphi(x+y)|+|\hat\varphi(x-y)|\le\|\hat\varphi\|(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)\underset{(\#)}{\overset{\text{κανόνας}}{=\!=}}\|\hat\varphi\|(2\|x\|^2+2\|y\|^2)$

$\underset{x,y\in B_H}{\overset{\text{όταν}}{\Longrightarrow}}$ $|\mathrm{Re}\varphi(x,y)|\le\|\hat\varphi\|$.

Παίρνουμε $x,y\in B_H$ κ' γράφουμε: $\varphi(x,y)=|\varphi(x,y)|e^{i\theta}$ (με $\theta\in\mathbb{R}$) δηλαδή $|\varphi(x,y)|=e^{-i\theta}\varphi(x,y)=\varphi(x,e^{i\theta}y)\in\mathbb{R}$. Έχουμε $|\varphi(x,y)|=\varphi(x,e^{i\theta}y)=$

$=\mathrm{Re}\varphi(x,e^{i\theta}y)\le\|\hat\varphi\|$ διότι $e^{i\theta}y\in B_H$.

$\Rightarrow\|T\|=\sup\{\varphi(x,y) : x,y\in B_H\}\le\|\hat\varphi\|$ $\lrcorner$

Προειδοποίηση: Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

• Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1,H_2) \to \mathcal{B}(H_2,H_1)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) Είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$

(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ φραγμένοι τελεστές, $(TS)^* = S^* T^*$.

(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα, αν $H_1 = H_2 = H$, η $T \to T^* : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλαδή την (ε).

Γ

(α) Έστω $T, S : H_1 \to H_2$ γραμμ. κ' φραγμ., $\lambda \in \mathbb{C}$. Θδο $(T+\lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

$$\langle (T+\lambda S)^* y, x \rangle_1 \overset{\text{ορ.}}{=} \langle y, (T+\lambda S)x \rangle_2 = \langle y, Tx + \lambda Sx \rangle = \langle y, Tx \rangle + \bar{\lambda} \langle y, Sx \rangle =$$

$$\overset{\text{ορ.}}{=} \langle T^*y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle S^*y, x \rangle = \langle T^*y + \bar{\lambda} S^*y, x \rangle = \langle (T^* + \bar{\lambda} S^*)y, x \rangle \quad \begin{matrix} \forall x \in H_1 \\ \forall y \in H_2 \end{matrix}.$$

$$\Rightarrow (T+\lambda S)^* = T^* = \bar{\lambda} S^*.$$

(β) $H_1 \xrightarrow{T} H_2$, $H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$, $H_1 \xrightarrow{(T^*)^*} H_2$. Θδο $T^{**} = T$.

$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$ νδο $\langle (T^*)^* x, y \rangle_2 \overset{?}{=} \langle Tx, y \rangle_2$

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle_2 \underset{\text{του } (T^*)^*}{\overset{\text{ορισμός}}{=\!=}} \langle x, T^*y \rangle_1 \underset{\text{του } T^*}{\overset{\text{ορισμός}}{=\!=}} \langle Tx, y \rangle_2 .$$

(γ) $\|T^*\| = \sup\{|\langle T^*y, x \rangle| : \forall x \in B_{H_1}, \forall y \in B_{H_2}\} = \sup\{|\langle y, Tx \rangle| : \forall x \in B_{H_1}, \forall y \in B_{H_2}\} =$

$= \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \forall x \in B_{H_1}, \forall y \in B_{H_2}\} = \|T\|.$

(δ) $ST : H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$, $(ST)^* : H_3 \longrightarrow H_1$ Νδο $(ST)^* = T^* S^*$.

$$\begin{tikzcd} H_3 \arrow[rr, "?"] \arrow[dr, "S^*"'] & & H_1 \\ & H_2 \arrow[ur, "T^*"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall x \in H_1, z \in H_3$ έχουμε: $\langle (ST)^* z, x \rangle_1 \overset{\text{ορ.}}{=} \langle z, (ST)x \rangle_3 = \langle z, S(Tx) \rangle_3 \overset{\text{ορ.}}{=} \langle S^*z, Tx \rangle_2 =$

$\overset{\text{ορ.}}{=} \langle T^* S^* z, x \rangle_1 \quad \Rightarrow (ST)^* = T^* S^*.$

(ε) Μαγική ιδιότητα C^*.

$\|T^*T\| \le \|T^*\| \|T\| = \|T\| \|T\| = \|T\|^2$. Από την άλλη, $\forall x \in H_1$ έχουμε

$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*(Tx), x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \le \|T^*Tx\| \|x\| \le \|T^*T\| \|x\|^2$

$\Rightarrow \|Tx\| \le \|T^*T\|^{1/2} \|x\| \ \forall x \in H_1$ αλλά $\|T\| = \inf\{k : \|Tx\| \le k\|x\| \ \forall x\} \Rightarrow \|T\| \le \|T^*T\|^{1/2}$

$H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$. Ο $T^*T : H_1 \to H_1$ φραγμένος τελεστής

Ενώ ο $TT^* : H_2 \to H_2$ φραγμένος τελεστής είναι ΑΛΛΟΣ τελεστής, εν γένει. (ακόμα κ' όταν $H_1 = H_2$). $\lrcorner$

• Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

1. Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός αν $T^*T = TT^*$ (σαν τις συναρτήσεις)
2. Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής αν $T = T^*$ (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
3. Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος αν $T^*T = I_{H_1}$ κ' $TT^* = I_{H_2}$ (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$).

Παραδείγματα:

1. Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός.

$\ulcorner S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ με $Se_n = e_{n+1}$ $\forall n \geq 0$. Ξέρουμε ότι $S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1}, & \forall n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

Οπότε, $S^*S(e_n) = S^*(e_{n+1}) = e_n$ $\forall n \geq 0$ δηλαδή $S^*S = I$ ($\{e_n\}$ ΟΚ βάση)

Ανάποδα, $SS^*(e_n) \overset{n \geq 1}{=} S(e_{n-1}) = e_n$. Αν $n = 0$ $SS^*(e_0) = S(0) = 0$

Άρα, $SS^*e_n = \begin{cases} e_n, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow SS^* \neq I$ Άρα $SS^* \neq S^*S$.

→ δηλ. διατηρεί τα μήκη (τις νόρμες)

Ο S^*S είναι προφανώς ισομετρία (αφού δεν κάνει τπτ)

Ο SS^* ΔΕΝ είναι ισομετρία (αφού $SS^*e_0 = 0$). Έχει όμως $\|SS^*\| = 1$ διότι $\|SS^*\| \leq \|S\|\|S^*\| = \|S\|^2 = 1$ κ' $\|SS^*(e_{19})\| = \|e_{19}\| = 1$. Άρα $\|SS^*\| \geq 1$

• Μια C^*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (δηλ. γραμμικός χώρος κ' δακτύλιος) με μια $\|\cdot\|$ που είναι πλήρης τ.ω $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$ κ' μια ενέλιξη τ.ω $\|a^*a\| = \|a\|^2$ $\forall a \in \mathcal{A}$.

κ' $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ $\forall x, y \in \mathcal{A}$ κ' $\lambda \in \mathbb{K}$.

Πχ. 1. $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, K συμπαγής (πχ. μετρικός)

2. $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$, H Hilbert

Τα δύο θεωρήματα:

1. Κάθε μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα "είναι" $\cong C(K)$ για κατάλληλο (μοναδικό) K.
2. Κάθε C^*-άλγεβρα είναι $\|\cdot\|$-κλειστή $*$-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ για

4. Ο μετασχηματισμός Fourier $F: L^2([0,2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Γ $F: L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ όπου $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \langle f, e_n \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$

$f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ όπου $e_n(t) = e^{int}$

όταν f συνεχής.

Δείξαμε $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}(n)\|_{\ell^2}$, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία από τον $L^2([-\pi,\pi])$ στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ που είναι & επί διότι $F(L^2([-\pi,\pi])) \supseteq F(\text{τριγ. πολυών.}) = c_{00}(\mathbb{Z})$.

$F^*: \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi,\pi])$ ικανοποιεί: $\forall a = (a(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z})$ θέτουμε $f_a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) e_n$ (πεπ/νο άθροισμα)

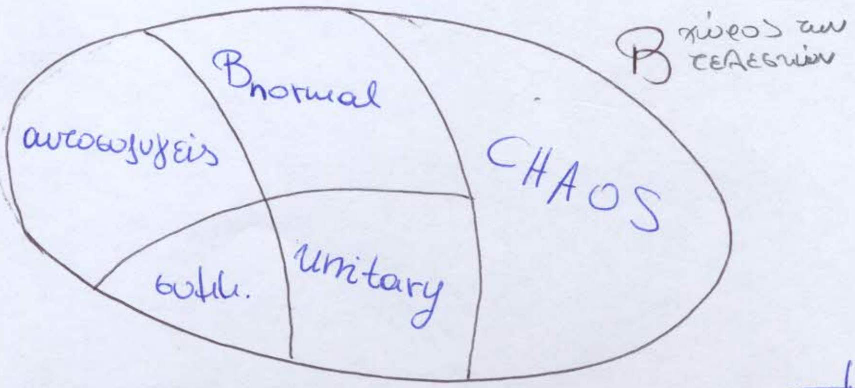
οπότε $\hat{f}_a(n) = \langle f_a, e_n \rangle = a(n)$ άρα $F^*(a) = f_a$.

Οπότε $F^*F: L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi,\pi])$ Αν f τριγων/κο πολυώνυμο:

$f \xmapsto{F} (\hat{f}(n)) \xmapsto{F^*} f_{(\hat{f}(n))} = f$ Άρα $F^*F = I_{L^2}$.

Αντίστροφα: $FF^*: \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([-\pi,\pi]) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

Αν $a = (a(n))_n \in c_{00}(\mathbb{Z}) \longrightarrow f_a \longrightarrow (\hat{f}_a(n)) = (a(n))$ Άρα $FF^* = I_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.



⊣

• Έστω $T \in B(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός ανν $\|Tx\| = \|T^*x\|\ \forall x \in H$.

Γ $TT^* = T^*T \iff \langle TT^*x, y \rangle = \langle T^*Tx, y \rangle\ \forall x,y \in H$.

$\Downarrow$ $\Uparrow$ polarization ⊛

$\langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle\ \forall x \in H \iff \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle\ \forall x \in H$

$\iff \|T^*x\| = \|Tx\|\ \forall x \in H$.

⊛ $4\langle Ax, y \rangle = \langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle + i\langle A(x+iy), x+iy \rangle - i\langle A(x-iy), x-iy \rangle$.

$\#$ Αυτοσυζυγής $\iff Tx = T^*x\ \forall x \in H$.

⊣

• Μερική ισομετρία λέγεται ένας τελεστής $V : H_1 \to H_1$, H_1 Hilbert όταν $V\big|_{(\ker V)^\perp}$ είναι ισομετρία.

Δηλαδή, γράφουμε $H_1 = (\ker V)^\perp \oplus \ker V$, $\ker V = \{x : Vx = 0\}$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{V} \begin{bmatrix} Vx \\ 0 \end{bmatrix}$$ κ' $\|Vx\| = \|x\|$. οπότε $x \in (\ker V)^\perp$ κ' $y \in \ker V$.

Άσκηση: V μερική ισομετρία $\iff$ V^* μερική ισομετρία.

• Ο $(\ker V)^\perp :=$ αρχικός χώρος του V κ' ο $V(H_1) = V((\ker V)^\perp) ::=$ τελικός χώρος του V. Είναι κ' οι δύο κλειστοί $\leq H_1$.

$E = (\ker V)^\perp \subseteq H_1$, $F = V(H_1) \subseteq H_1$.

$V\big|_E : E \to F$ ισομετρικά επί, $V^*\big|_F : F \to E$ ισομετρικά επί

#Ο $V(H_1)$ είναι κλειστός. Αυτό ΔΕΝ ισχύει γενικά για φραγμένους τελεστές. πχ; ⌟

• Παραδείγματα:

1. Αν $H_1 = H_2 = H$ με $\dim H < \infty$ κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
2. Στον ℓ^2, ο $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$

   «Στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κ' αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος.» (άσκηση ?).
3. Ο τελεστής $M : H^2 \to H^2$ όπου $(Mf)(z) = z f(z)$, $f \in H^2$ είναι ισομετρία, όχι επί.

• Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $A = A_1 + i A_2$, όπου $A_i = A_i^*$ $(i = 1, 2)$.

Γ $H_1 = H_2 = H$, $(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$ μιγαδικός χώρος Banach κ' C^*-άλγεβρα

$T \in \mathcal{B}(H)$, $T + T^* \in \mathcal{B}_h(H)$, $\dfrac{T - T^*}{i} \in \mathcal{B}_h(H)$

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\,\frac{T - T^*}{2i} = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$$

μοναδικά: $T = A + iB$, $A, B \in \mathcal{B}_h(H)$ τότε $A = \dfrac{T + T^*}{2}$, $B = \dfrac{T - T^*}{2i}$

διότι $\mathcal{B}_h(H) \cap (i\mathcal{B}_h(H)) = \{0\}$. Πράγματι, αν $A = iB$ όπου $A, B \in \mathcal{B}_h(H)$
$\Rightarrow A = A^* = (iB)^* = -iB^* = -iB = -A \Rightarrow A = 0$.

Δηλαδή, $\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}_h(H) + i\,\mathcal{B}_h(H)$ (αλγεβρικό) ευθύ άθροισμα

Ο $\mathcal{B}_h(H)$ είναι πραγματικός χώρος Banach. : Αν $A_n \in \mathcal{B}_h(H)$ με $\|A_n - A\| \to 0$, τότε $\forall x \in H$, $\langle Ax, x\rangle = \lim_n \langle A_n x, x\rangle$ κ' $\langle Ax,x\rangle, \langle A_n x, x\rangle \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow A = A^*$. ┘

• Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ $\forall x \in H$. Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.

• Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$ $\forall x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

\# $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$.

┌
$\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$

$A \geq 0 \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in H \ \langle Ax, x\rangle \geq 0$.

<u>ΜΗ</u> παράδειγμα: $H = L^2([0,1])$, $T \in \mathcal{B}(H)$: διατηρεί τη διάταξη "$\geq$" αν
$f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ! $f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0 \not\Leftrightarrow \langle Tf, f\rangle \geq 0 \ \forall f$ (είναι άσχετα μεταξύ τους)

Παραδείγματα:

1. Όταν $\dim H < +\infty$

• $A = A^* \Rightarrow \exists$ μια ορθική βάση του H που τον διαγωνοποιεί δηλαδή $\exists \{x_1, \dots, x_n\}$ ορθική βάση : $Ax_k = \lambda_k x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ με $\lambda_k \in \mathbb{R}$ διότι $\lambda_k = \langle Ax_k, x_k\rangle \in \mathbb{R}$.

Γνωστό από Γρ. Άλγεβρα θα το δείξουμε αργότερα.

• $A \geq 0$ ανν είναι αυτοσυζυγής κ' οι ιδιοτιμές του είναι ≥ 0

Αποδ. $\leadsto$ $\forall x \in H$ $x = \sum \langle x, x_k\rangle x_k \Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \sum \langle x, x_k\rangle \underbrace{\langle Ax_k, x\rangle}_{=\lambda_k \langle x_k, x\rangle} = \sum |\langle x, x_k\rangle|^2 \lambda_k$

$\underset{\forall x}{\Rightarrow} \langle Ax, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \forall \lambda_k \geq 0$.

\# Η υπόθεση $A = A^*$ ΔΕΝ μπορεί να παραλειφθεί
$\Leftrightarrow$ Δεν αρκεί : ιδιοτιμές ≥ 0.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $1, 1 \geq 0$ αλλά όχι αυτοσυζυγής. $A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle Ax, x\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 + 1 = -1$.

2. M_f στον $L^2([0,1])$, $f\in C([0,1])$

• Ξέρουμε ότι $M_f^* = M_{\bar f}$ άρα $M_f = M_f^* \iff f=\bar f$ δηλ. $f(t)\in\mathbb{R}$ $\forall t\in[0,1]$

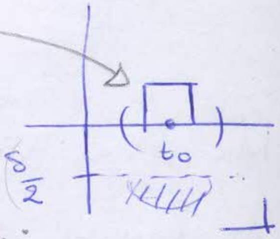
• Επαληθεύστε ότι $M_f \geq 0 \iff f(t)\geq 0$ $\forall t\in[0,1]$.

Πράγματι, $\forall g\in C([0,1])$ $\langle M_f g, g\rangle = \langle fg, g\rangle = \int f g\bar g = \int f(t)\underbrace{|g(t)|^2}_{\geq 0} dt$

αν $f(t)\geq 0 \Rightarrow \langle M_f g,g\rangle \geq 0$

"⇐" Αν $f(t_0)=\delta<0$ $\exists$ διάστημα (a,b) όπου $f(s)<\frac{\delta}{2}$

Οπότε με κατάλληλο g δείχνουμε ότι $\langle M_f g,g\rangle<0$.



• Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H)\subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι:

1. κώνος: $A\geq 0,\ t\geq 0 \Rightarrow tA\geq 0$.
2. κυρτός: $A,B\geq 0,\ \lambda\in[0,1] \Rightarrow \lambda A+(1-\lambda)B\geq 0$
3. γνήσιος: $A\geq 0$ κ' $-A\geq 0 \Rightarrow A=0$
4. παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ - full cone - : $\forall T\in\mathcal{B}_h$ $\exists A,B\geq 0: T=A-B$.
5. $\|\cdot\|$-κλειστός.

2. $\forall x\in H$ $\langle(\lambda A+(1-\lambda)B)x,x\rangle = \overset{\geq 0}{\lambda}\langle \overset{\geq 0}{Ax,x}\rangle + \overset{\geq 0}{(1-\lambda)}\langle \overset{\geq 0}{Bx,x}\rangle \geq 0$

3. $A\geq 0$ κ' $-A\geq 0 \Rightarrow \forall x$ $\langle Ax,x\rangle\geq 0$ κ' $-\langle Ax,x\rangle\geq 0$

Άρα $\langle Ax,x\rangle = 0$ $\forall x \overset{\text{Polar}}{\Longrightarrow} \langle Ax,y\rangle = 0$ $\forall x,y \Rightarrow A=0$

4. Ισχ. $\forall T\in\mathcal{B}_h(H)$ $\exists$ (όχι μοναδικά) $A,B\geq 0: T=A-B$

$\forall x\in H$ $|\langle Tx,x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\langle x,x\rangle = \langle \lambda I x,x\rangle$ όπου $\lambda=\|T\|$.

$\iff \forall x$ $\langle(\lambda I-T)x,x\rangle\geq 0$ δηλ. $\lambda I - T = B\geq 0$

Ομοίως, $\langle Tx,x\rangle \geq -\|T\|\langle x,x\rangle$ δηλ. $\langle Tx,x\rangle\geq\langle(-\lambda I)x,x\rangle$

δηλαδή $(T+\lambda I)=A\geq 0$.

$-\lambda I\leq T\leq\lambda I$ όπου $\lambda\geq\|T\|$

Άρα $A-B = (T+\lambda I)-(\lambda I - T) = 2T \Rightarrow T=\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$.

Οι δύο ανισότητες που αποδείξαμε είναι $-\lambda I\leq T\leq \lambda I$, όπου $\lambda\geq\|T\|$.

5. Αν $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$ με $A_n\in\mathcal{B}_+(H)$, τότε $\forall x\in H$ $\langle Ax,x\rangle = \lim_n \underbrace{\langle A_nx,x\rangle}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \langle Ax,x\rangle\geq 0$ άρα $A\geq 0$. Δηλ. $A\in\mathcal{B}_+(H)$

#. $\|A_n - A\| \to 0 \iff A_n x \xrightarrow[\substack{\text{ως προς} \\ x\in B_H}]{\text{ομοιόμορφα}} Ax$ ⟶ σύγκλιση ως προς τη νόρμα

ΕΝΩ: $A_n x \to Ax \ \forall x$: σύγκλιση κ.σ. ← αυτό χρησιμοποιήσαμε πριν.

$\langle A_n x, y\rangle \to \langle Ax, y\rangle \ \forall x,y \in H$ λέγεται weak operator convergence (W.O.T)

Προφανώς, $\|\cdot\|$-σύγκλιση $\Rightarrow$ κ.σ σύγκλιση $\Rightarrow$ W.O.T-σύγκλιση
$\not\Leftarrow$ $\not\Leftarrow$
(σε απειροδιάστατους χώρους).

• Με άλλα λόγια: Η διάταξη $\geq$ στον $B_h(H)$ είναι συμβιβαστή με τη γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A,B,S,T \in B_h$ κ' $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B,\ S \geq T \Rightarrow A+S \geq B+T \quad \text{κ'} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Η διάταξη $\geq$ στον $B_h(H)$ είναι μερική διάταξη, όχι ολική.

Πχ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in B_h(\mathbb{C}^2)$

$A - B \not\geq 0$ κ' $B - A \not\geq 0$ αφού $A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ κ' $B-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

⟶ ΜΠΑΙΝΕΙ ΘΕΜΑ!

• Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ κ' $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ κ' $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Αν $A = A^*$ τότε $-\|A\| I \leq A \leq \|A\| I$ άρα $A = (A + \|A\|I) - \|A\|I$ (διαφορά δύο θετικών)

$A \geq 0, B \geq 0$ κοιτάμε τον AB. Για να είναι $AB \geq 0$, ΑΝΑΓΚΑΙΑ συνθήκη είναι: $(AB) = (AB)^* = B^* A^* = BA$. Άρα αναγκαία συνθήκη είναι να μετατίθενται, δηλ $AB = BA$.

Είναι ικανή; Ναι, αλλά δεν έχουμε τα εργαλεία να τ'αποδείξουμε.

Πχ-άσκηση.

$A \geq 0$, $B \in B(H)$ τότε $B^* A B \geq 0$ (SOS) διότι $\forall x$ $\langle B^*ABx, x\rangle = \langle ABx, Bx\rangle =$
$= \langle Ay, y\rangle \geq 0$, όπου $y = Bx$.

• Για να δούμε: $A \geq 0$, $B \geq 0$ κ' $AB = BA$. Θέλουμε ν.δ.ο. $AB \geq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $B = C^2$, όπου $C \geq 0$ κ' $CA = AC$. (Αν $AB = C^*AC$ θα είναι οκ. Μπορώ να το γράψω έτσι;)
Τότε $AB = AC^2 = ACC = CAC \geq 0$.

Αν.δ.ο $\forall B \geq 0$ έχει μια τετραγωνική ρίζα $C \geq 0$ με την ιδιότητα $CX = XC$ $\forall X$ τ.ω $BX = XB$ δηλ ο C μετατίθεται με ό,τι μετατίθεται με τον B.

Πχ. Αν $B = M_f$ στον $L^2[0,1]$, ξέρουμε ότι $B \geq 0 \Leftrightarrow f(t) \geq 0$ $\forall t$
Θέτουμε $g(t) = \sqrt{f(t)}$ $\forall t$ κ' $C = M_g \geq 0$. που ικανοποιεί τη συνθήκη: αν $XB = BX$ τότε $XC = CX$ (γιατί;)

$\forall T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται (!) $T = T_1 + iT_2$ με $T_1, T_2 \in \mathcal{B}_h$.
$\forall A \in \mathcal{B}_h(H)$ γράφεται (!) ως $A = B - C$, όπου $B, C \geq 0$.
$\Rightarrow \forall T \in \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός συνδυασμός 4 θετικών τελεστών.

- $\forall B^*B \geq 0$ διότι $\langle B^*Bx, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle \geq 0$.
- Αντίστροφα, αν $A \geq 0$ τότε $\exists B : A = B^*B$.

Αποδ. Παίρνουμε $B = A^{1/2}$ (Πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη ρίζας!!!)
Πχ $A = D_a$ (διαγώνιος), $a = (a(u))$ τότε:
$A \geq 0 \Leftrightarrow a(u) \geq 0$ $\forall u$ Οπότε θέτουμε $b(u) = \sqrt{a(u)}^{\geq 0}$ $\forall u$
οπότε $D_b \geq 0$ και $D_b^* D_b = D_b^2 = D_{b^2} = D_a$.

\# Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$. Ορίζουμε $\underset{\text{super operator}}{\Phi_B} : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$
$A \mapsto B^*AB$

Τότε η απεικόνιση Φ_B διατηρεί την ≥ 0 δηλ $A \geq 0 \Rightarrow \Phi_B(A) \geq 0$.

Γενικότερα, $\Phi(A) = \sum_{k=1}^{n} B_k^* A B_k$: διατηρεί την ≥ 0 ⊥

- Γενικευμένη ανισότητα Cauchy-Schwarz: Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε $\forall x, y \in H$, $|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle$ κ' $\|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle$.

Ορίζουμε $\phi_B(x,y)=\langle Bx,y\rangle$ κ' παρατηρούμε ότι είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο:

- sesquilinear
- $\overline{\phi_B(x,y)}=\phi_B(y,x)$ διότι $\overline{\phi_B(x,y)}=\overline{\langle Bx,y\rangle}=\langle y,Bx\rangle=\underset{\phi_B(y,x)}{\underset{\|}{\langle By,x\rangle}}$
- $\phi_B(x,x)=\langle Bx,x\rangle\geq 0$. (έδειξα το πρώτο κομμάτι της C-S πάνω για το δεύτερο)

$\|Bx\|^2=\langle Bx,Bx\rangle=\langle Bx,y\rangle \overset{?}{,}\ y=Bx$.

$\|Bx\|^4=|\langle Bx,y\rangle|^2\leq\langle Bx,x\rangle\langle By,y\rangle\leq\langle Bx,x\rangle\|B\|\,\|y\|^2=\langle Bx,x\rangle\|B\|\,\|Bx\|^2$

$\Rightarrow \|Bx\|^2\leq\|B\|\langle Bx,x\rangle$. ┘

$\|Bx\|^4=|\langle Bx,Bx\rangle|^2$ θέτω $y=Bx$ στην 1η ανισότητα που έδειξα κ' την εφαρμόζω

Εδώ κ' έχω $\|Bx\|^4\leq\langle Bx,x\rangle\langle BBx,Bx\rangle \overset{C-S}{\leq}\langle Bx,x\rangle\|B^2x\|\,\|Bx\|\leq\langle Bx,x\rangle\|B\|\,\|Bx\|\,\|Bx\|$

- Έστω (B_n) αύξουσα κ' φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx=\lim_n B_nx$ $\forall x\in H$. Επιπλέον, $B_n\leq Y$ $\forall n\in\mathbb{N}$ κ' αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n\leq C$ $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $Y\leq C$.

\# Προφανώς, το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες τελεστών.

Γ Έχουμε $B_n=B_n^*$ $\forall n$, $B_n\leq B_{n+1}$, $\sup_n\|B_n\|=M<+\infty$ (οποιοδήποτε φραγμ.). Θ.δ.ο. $B_n\nearrow Y$ κ.σ. κλπ.

Θεωρούμε τις αντίστοιχες sesquilinear forms $\phi_n(x,y)=\langle B_nx,y\rangle$, $x,y\in H$

αν $x=y$ $(\phi_n(x,x))=(\langle B_nx,x\rangle)_n$ αύξουσα ακολ. στον $\mathbb{R}$ κ' είναι άνω φραγμένη: $|\varphi_n(x,x)|\leq\|B_n\|\,\|x\|^2\leq M\|x\|^2$.

Από Απειρ I $\exists\lim_{n\to\infty}\phi_n(x,x)=\sup_n\phi_n(x,x)\overset{\text{polar}}{\Longrightarrow}(\phi_n(x,x))$ συγκλίνει $\forall x\Rightarrow$

$\Rightarrow(\phi_n(x,y))$ συγκλίνει $\forall x\,\forall y$ διότι $\varphi_n(x,y)=\varphi_n(\xi_1,\xi_1)-\varphi_n(\xi_2,\xi_2)+i\varphi_n(\xi_3,\xi_3)-i\varphi_n(\xi_4,\xi_4)$.

Έστω $\varphi(x,y)=\lim_n\varphi_n(x,y)$.

Παρατηρούμε ότι φ είναι sesq διότι κάθε φ_n είναι sesq

πχ. $\varphi(x_1+\lambda x_2,y)=\lim_n\varphi_n(x_1+\lambda x_2,y)=\lim_n(\varphi_n(x_1,y)+\lambda\varphi_n(x_2,y))=\varphi(x_1,y)+\lambda\varphi(x_2,y)$

Επίσης, $\forall$ $|\varphi_n(x,y)|=|\langle B_nx,y\rangle|\leq\|B_n\|\,\|x\|\,\|y\|\leq M\|x\|\,\|y\|$

$\Rightarrow|\varphi(x,y)|=\lim_n|\varphi_n(x,y)|\leq M\|x\|\,\|y\|$: φ φραγμ. Άρα από Θ. Riesz $\exists!\,Y\in B(H)$ ώστε $\varphi(x,y)=\langle Yx,y\rangle$ $\forall x,y$. Δηλ. $\langle Yx,y\rangle=\lim_n\langle B_nx,y\rangle$ $\forall x,y$

#1 $\forall x \ \langle Yx, x\rangle = \lim_n \langle B_n x, x\rangle \geq 0 \Rightarrow Y \geq 0$

2 Αφού $\langle B_n x, x\rangle$ αύξουσα, $\langle Yx, x\rangle \overset{\nearrow \sup}{\geq} \langle B_n x, x\rangle \ \forall x \Rightarrow Y \geq B_n \ \forall n$

3. Αν $C \geq B_n \ \forall n$, τότε $\forall x \ \langle Cx, x\rangle \geq \langle B_n x, x\rangle \ \forall n \ \forall x$

$\Rightarrow \langle Cx, x\rangle \geq \underset{\sup}{\lim_n} \langle B_n x, x\rangle \ \forall x$ δηλ. $C \geq Y$

Άρα, " $Y = \sup B_n$. "

Μένει ν.δ.ο $Yx = \lim_n B_n x \ \forall x$ (στην τοπολογία της $\|\cdot\|$ του H)

$\forall x \in H, \forall m \in \mathbb{N}: \ \|Yx - B_m x\|^2 = \|(Y-B_m)x\|^2$ αλλά $Y - B_m \geq 0$

$\overset{\text{λήμμα C-S}}{\leq} \|Y - B_m\| \langle (Y-B_m)x, x\rangle \leq 2M(\langle Yx, x\rangle - \langle B_m x, x\rangle)$

(Ισχύει $\|Y - B_m\| \leq \|Y\| + \|B_m\| \leq 2M$ διότι $\forall x \ \langle Yx, x\rangle = \lim \langle B_m x, x\rangle \leq M\|x\|^2$

$\Rightarrow \|Y\| \leq M$).

Τελικά, $\|Yx - B_m x\|^2 \leq 2M(\langle Yx, x\rangle - \langle B_m x, x\rangle) \to 0$

Δείξαμε ότι $Yx = \lim_m B_m x \ \forall x \in H$. ⊣

• Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του A κ' συμβολίζεται $A^{1/2}$.

Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

⌐ $A \geq 0$ τότε $0 \leq \frac{A}{\|A\|} \leq I$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq A \leq I$.

Αν θέσουμε $B = I - A \geq 0$, θα βρούμε Y με $0 \leq Y \leq I$ ώστε $(I-Y)^2 = I - B$.

Οπότε θέτοντας $X = I - Y$ θα έχουμε $X \geq 0$ κ' $X^2 = I - B = A$

Υπενθύμιση: (Ανάλ. I) Έστω $0 \leq b \leq 1$. Θέτουμε $b_0 = 0$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b + b_n^2)$

τότε δείχνουμε ότι (b_n) είναι αύξουσα κ' φραγμένη κ' αν $y = \lim_n b_n$

τότε $y = \frac{1}{2}(b + y^2) \Leftrightarrow (y-1)^2 = 1 - b$.

Κάνουμε το "ίδιο" με τελεστές. Έχουμε $0 \leq B \leq I$. Θέτουμε

$B_0 = 0, \ B_1 = \frac{1}{2}B, \ B_2 = \frac{1}{2}\left(B + (\tfrac{1}{2}B)^2\right) \ \ldots \ B_{n+1} = \frac{1}{2}(B + B_n^2)$

$\forall B_n$ είναι πολυώνυμο του B με ≥ 0 συντελεστές. (αποδ. με επαγωγή)

Άρα κάθε $B_n \geq 0$ κ' επιπλέον αν $CB = BC$ τότε $CB_n = B_n C \ \forall n$

Οπότε αν δείξουμε ότι υπάρχει το κ.σ όριο $\underbrace{Yx = \lim_n B_n x \ \forall x}_{\circledast}$ τότε ο Y έχει τις ιδιότητες που θέλουμε:

(i) $\forall x \ \langle Yx, x\rangle = \lim_n \langle B_n x, x\rangle \geq 0$

(ii) $\forall x \ \langle B_{n+1}x, x\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle Bx, x\rangle + \langle B_n^2 x, x\rangle\right)$, $\langle B_n^2 x, x\rangle = \langle B_n x, B_n x\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\langle Yx, x\rangle = \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Yx, Yx\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle Bx, x\rangle + \langle Y^2 x, x\rangle\right)$$

$$\overset{\text{polar}}{\underset{\forall x \forall y}{\Longrightarrow}} Y = \frac{1}{2}(B + Y^2) \iff (I - Y)^2 = (I - B)^2$$

κ αν $CB = BC$, τότε $CB_n = B_n C \ \forall n$ άρα $CB_n x = B_n(Cx) \ \forall n \forall x$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} CYx = YCx \ \forall x, \text{ δηλ } CY = YC.$$

Αρκεί λοιπόν ν.δ την $\circledast$. Αρκεί γι' αυτό, από την πρόταση, νδο (B_n) είναι αύξουσα κ άνω φραγμένη ($\|B_n\| \leq 1$). Αυτά προκύπτουν με επαγωγή, όπως στον ΑπειΙ αφού παρατηρήσουμε ότι $B_n B_m = B_m B_n \ \forall n, m$ (διότι είναι πολυώνυμα του B). ⊣

• Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, τότε ο AB είναι θετικός ανν $AB = BA$. "$\Rightarrow$" $AB \geq 0 \Rightarrow AB$ αυτοσυζυγής άρα $AB = (AB)^* = B^* A^* = BA$ αφού $A, B \geq 0$ δηλ επίσης αυτοσυζυγείς.

⌐"$\Leftarrow$" $A, B \geq 0$ κ $AB = BA \Rightarrow A^{1/2}B = BA^{1/2}$

$AB = A^{1/2}A^{1/2}B = A^{1/2}BA^{1/2}$. Έχουμε ότι:

$\forall x \in H \ \langle ABx, x\rangle = \langle A^{1/2}BA^{1/2}x, x\rangle = \langle BA^{1/2}x, (A^{1/2})^* x\rangle = \langle B(A^{1/2}x), (A^{1/2}x)\rangle \geq 0$ αφού $B \geq 0$.

Χρησιμοποιούμε: $XA = AX \Rightarrow XA^{1/2} = A^{1/2}X$

Απόδειξη: ο $A^{1/2}$ είναι κ.σ όριο μιας (A_n) όπου $A_n = p_n(A)$ πολυώνυμο του A

Όμως, $XA = AX \Rightarrow XA^2 = A^2X \Rightarrow XA^n = A^nX \ \forall n$ (επαγωγή) $\Rightarrow Xp_n(A) = p_n(A)X \ \forall n$

$\Rightarrow \forall \xi \in H$, έχουμε $A^{1/2}\xi = \lim_n p_n(A)\xi$ οπότε $A^{1/2}X\xi = \lim p_n(A)X\xi$

$XA^{1/2}\xi = X(\lim p_n(A)\xi) = \lim_n (Xp_n(A)\xi) = \lim(p_n(A)X\xi) = A^{1/2}X\xi \ \forall \xi$.

Άρα, $XA^{1/2} = A^{1/2}X$ ⊣

• Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

⌐$|T| := (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}_+(H)$.

Άσκηση: Βρείτε $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ ώστε $|A+B| \nleq |A| + |B|$. ⊣

• Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1,H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M=(\ker V)^{\perp}$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος & ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V. διότι M πλήρης & $V|_M$ ισομετρία
Βλ. αρχείο merisom.pdf

• Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική πολική αναπαράσταση $z=u|z|$, όπου $|z|>0$ & $|u|=1$.

Πολική αναπαράσταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1,H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ & τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε $T=V|T|$.

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\ & H_1 \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης: Παρατηρούμε ότι $\|Tx\|=\||T|x\| \ \forall x \in H_1$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε $V_0 : |T|x \to Tx$ & να επεκτείνουμε ...

$A: H_1 \to H_2$ γραμμ. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\dim H_i = d_i < +\infty$

$A^*A : H_1 \xrightarrow{A} H_2 \xrightarrow{A^*} H_1$ θετικός. Είναι γνωστό ότι $\exists$ ο.κ. βάση $\{e_1,e_2,\dots,e_{d_1}\}$ (θα το δείξουμε αργότερα) του H_1 από ιδιοδιανύσματα του A^*A, δηλαδή

$\exists \lambda_k : A^*A(e_k)=\lambda_k e_k, \ k=1,\dots,d_1$.

$$A^*A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{d_1} \end{bmatrix}$$

$\lambda_k \geq 0$ διότι
$\lambda_k = \lambda_k \langle e_k,e_k\rangle = \langle \lambda_k e_k, e_k\rangle = \langle A^*Ae_k, e_k\rangle \geq 0 \ \forall k$.

Οπότε ονομάζουμε $s_k=\sqrt{\lambda_k}, \ k=1,\dots,d_1$. & ορίζουμε $|A|(e_k)=s_k e_k, \ k=1,\dots,d_1$

Επεκτείνουμε γραμμικά (χωρίς τη χρήση του θεωρ. ύπαρξης $\sqrt{A^*A}$)

$$|A| \sim \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{d_1} \end{bmatrix}$$

$\ker|A| = [e_k : s_k=0] = [e_k : \lambda_k=0] = \ker A^*A = \ker A$
(Απόδειξη: αν $x \in \ker A$ τότε $A^*Ax = A^*0 = 0$
αν $x \in \ker A^*A$ τότε $\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0$)

Μπορούμε να ορίσουμε $V: H_1 \to H_2, \ Ve_k = \begin{cases} \frac{Ae_k}{s_k} & , s_k>0 \\ 0 & , s_k=0 \end{cases}$

& επεκτείνουμε γραμμικά.

$\langle Ae_k, Ae_m\rangle = \langle A^*Ae_k, e_m\rangle = \langle \lambda_k e_k, e_m\rangle = \begin{cases} \lambda_k & , k=m \\ 0 & , k\neq m \end{cases} = \langle \lambda_m e_k, e_m\rangle =$

$= \langle e_k, s_m^2 e_m\rangle = \langle s_k e_k, s_m e_m\rangle$. Άρα, $\langle \frac{Ae_k}{s_k}, \frac{Ae_m}{s_m}\rangle = \langle e_k,e_m\rangle$ όταν ορίζονται άρα τα $\{\frac{Ae_k}{s_k} : s_k>0\}$ είναι ο.κ. βάση του $\ker(A^*A)^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$

οπότε $V(e_k) = \begin{cases} \frac{Ae_k}{s_k} & , s_k>0 \\ 0 & , s_k=0 \end{cases}$. Έχουμε ορίσει μια μερική ισομετρία

με αρχικό χώρο $(\ker A)^\perp$ κ' τελικό χώρο $\mathrm{span}\{\frac{Ae_k}{s_k} : s_k>0\} =$

$= \mathrm{span}\{Ae_k : s_k>0\} = \mathrm{span}\{Ae_k : k=1,\dots,d_1\} = A(H_1)$ κ' ισχύει

$V s_k e_k = Ae_k \ \forall k=1,\dots,d_1$ όμως $s_k e_k = |A| e_k$. Άρα δείξαμε

$V|A|e_k = Ae_k \ \forall k=1,\dots,d_1 \Rightarrow V|A| = A$. ∎

Γενική περίπτωση: $T \in \mathcal{B}(H_1,H_2) : H_1 \xrightarrow{T} H_2$, $T^*T \in \mathcal{B}_+(H_1)$ οπότε ορίζουμε $|T| \in \mathcal{B}_+(H_1)$ ως εξής: $|T| = (T^*T)^{1/2}$.

$\forall x \in H_1$, $\|Tx\| = \||T|x\|$

Αποδ: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle |T||T|x, x\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle =$

$= \||T|x\|^2$. Ειδικότερα, $Tx = 0 \Leftrightarrow |T|x = 0$ δηλ. $\ker T = \ker|T|$.

Οπότε ορίζουμε $V_0 : |T|(H_1) \to T(H_1)$, $|T|x \longmapsto Tx$ καλά ορισμένο διότι αν $|T|x = |T|y$

τότε $|T|(x-y) = 0 \Rightarrow T(x-y) = 0 \Rightarrow Tx = Ty$ κ' παρατηρούμε ότι V_0 ισομετρία διότι

$\forall y = |T|x$ έχουμε $\|V_0 y\| = \|V_0(|T|x)\| \overset{\text{ορ.}}{=} \|Tx\| = \||T|x\| = \|y\|$. Άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $V_1 : \overline{|T|(H_1)} \twoheadrightarrow \overline{T(H_1)}$ επί. Ορίζουμε $\forall y \in H_1$

$Vy = \begin{cases} V_1(y) & , y \in \overline{|T|(H_1)} \\ 0 & , y \perp \overline{|T|(H_1)} \end{cases}$.

$$\begin{array}{ccccc} H_1 = & \overline{|T|(H_1)} & \oplus & \left(\overline{|T|(H_1)}\right)^\perp \\ & \downarrow V_1 & & \downarrow 0 \\ H_2 = & \overline{T(H_1)} & \oplus & \left(\overline{T(H_1)}\right)^\perp \end{array}$$

Έχουμε V μερική ισομετρία κ' $\forall x \in H_1$ $V|T|x = V_1(|T|x) = V_0(|T|x) = Tx$

$\Rightarrow V|T| = T$ ∎

• Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$H = M \oplus M^\perp : x = x_M + x_{M^\perp}$

Η ορθή προβολή επί του M: $P_M : H \to H : x \mapsto x_M$ γραμμική κ' ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Αλγεβρική σημείωση: Αν $H = M \oplus N$: N, M γρ. υπόχωροι με $M \cap N = \{0\}$, τότε $\forall x \in H$ γράφεται ! $x = x_M + x_N$ οπότε η απεικόνιση $P : H \to H$ με $x \mapsto x_M$ είναι 1. καλά ορισμένη 2. γραμμική 3. $P \circ P = P$ 4. $\mathrm{Im}P = M$, $\ker P = N$

Ειδικότερα, όταν H Hilbert κ' M κλειστός υπόχωρος, $N = M^{\perp}$ έχουμε την ορθή προβολή $P_M : H \to H$ δηλ $\|x - P_M x\| = dist(x, M)$ $\forall x \in H$.

• Έστω H χώρος Hilbert κ' $P : H \to H$ γραμμική κ' ταυτοδύναμη απεικόνιση

ΤΑΕΙ: 1. Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$

2. $(\ker P) \perp (\operatorname{Im} P)$ 3. $\|P\| \leq 1$.

$1 \Rightarrow 2$: Αν $P = P_M : \underset{x \mapsto x_M}{H \to H}$: $x = x_M + x_{M^{\perp}}$ τότε $\left.\begin{matrix} \operatorname{Im} P_M = M \\ \ker P_M = M^{\perp} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\operatorname{Im} P_M) \perp (\ker P_M)$

$2 \Rightarrow 3$: $\forall x = Px + (x - Px)$ προφανώς $Px \in \operatorname{Im} P$ κ' $x - Px \in \ker P$ διότι

$P(x - Px) = Px - P^2 x = Px - Px = 0$ Άρα από υπόθεση, $Px \perp (x - Px) \overset{\text{Π.Θ}}{\Longrightarrow}$

$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 \geq \|Px\|^2 \Rightarrow \forall x$ $\|Px\| \leq \|x\|$ δηλ $\|P\| \leq 1$

$3 \Rightarrow 1$: Ξέρουμε $P^2 = P$ κ' ότι $\|P\| \leq 1$. Θέτουμε $M = \operatorname{Im} P$ γραμμ. υπόχωρος

M κλειστός διότι $\operatorname{Im} P = \ker(I - P)$

Απόδειξη: Αν $y = Px$ τότε $Py = P^2 x = Px = y$ οπότε $(I - P)y = y - Py = 0$

άρα $y \in \ker(I - P)$. Αντίστροφα, αν $y \in \ker(I - P)$ τότε $(I - P)y = 0$ οπότε

$y = Py \in \operatorname{Im} P$ "$\{0\}$"

Όμως, $\|P\| \leq 1$ άρα P συνεχής, άρα $I - P$ συνεχής άρα $\ker(I - P)$ κλειστός

υπόχωρος $\Rightarrow \operatorname{Im} P$ κλειστός υπόχωρος.

Έχουμε θέσει $M = \operatorname{Im} P$. Πρέπει ν.δ.ο $\ker P = M^{\perp} \Leftrightarrow (\ker P)^{\perp} = M^{\perp\perp} = M$

Έστω $x \in (\ker P)^{\perp}$ επειδή $Px - x \in \ker P$, έχουμε $x \perp (Px - x) \overset{\text{Π.Θ}}{\Longrightarrow}$

$\overset{\|x\|^2 \leq}{\Longrightarrow} \|x\|^2 + \|Px - x\|^2 = \|x + Px - x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \overset{0 \leq \|Px - x\|^2 \leq 0}{\|Px - x\|^2 = 0}$ άρα $x = Px \in M$

Δείξαμε: $(\ker P)^{\perp} \subseteq M$.

Αν δεν ήταν ίσα, θα $\exists y \in M \setminus \{0\}$ $y \perp (\ker P)^{\perp}$ δηλ $y \in (\ker P)^{\perp\perp} = \ker P$

όμως $y = Py$ άρα $y = 0$. Οπότε $(\ker P)^{\perp} = M$.

• Έστω H χώρος Hilbert κ' $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής

ΤΑΕΙ: 1. Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{Im} P$

2. Ο P είναι θετικός

3. Ο P είναι αυτοσυζυγής

4. Ο P είναι φυσιολογικός.

⌐ $1 \Rightarrow 2$: $\forall x \in H$ ΘΔΟ $\langle Px, x\rangle \geq 0$ # $Px \in \operatorname{Im}P$, $x - Px \in \ker P = (\operatorname{Im}P)^{\perp}$

άρα $\langle Px, x-Px\rangle = 0 \Rightarrow \langle Px, x\rangle = \langle Px, Px\rangle \geq 0$ αφού $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$

$2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$: Προφανή $(P \geq 0 \Rightarrow P = P^* \Rightarrow PP^* = P^*P)$

$4 \Rightarrow 1$: Πρέπει ν.δ.ο. $(\operatorname{Im}P) \perp (\ker P)$

Έστω $y \in \operatorname{Im}P$, $x \in \ker P \Rightarrow \exists z : y = Pz \Rightarrow Py = P^2 z = Pz = y$.

① $\langle x, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle P^* x, y\rangle$ όμως $x \in \ker P$ δηλ. $\|Px\| = 0 \underset{normal}{\overset{P}{=}} \|P^* x\|$

$(\|P^*x\|^2 = \langle P^*x, P^*x\rangle = \langle PP^*x, x\rangle,\ \|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle)$

Άρα $P^*x = 0$ οπότε από ① έπεται $\langle x, y\rangle = 0$ ⌟

• Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή ανν είναι ταυτοδύναμος κ' αυτοσυζυγής.

Βλ. αρχείο probuewu.pdf

• Χρήσιμες παρατηρήσεις:

1. Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\Leftrightarrow P = P^* = P^2$
2. Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{Im}P \Leftrightarrow x = Px$ κ' $x \in \ker P \Leftrightarrow x \in \operatorname{Im}(I-P)$
3. Αν P ορθή προβολή, τότε $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ $\forall x \in H$ κ' $Py = y \Leftrightarrow \|Py\| = \|y\|$.

⌐ (i) P ορθή προβολή: $\forall x$ $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$

(ii) P ορθή προβολή τότε $y \in \operatorname{Im}P \Leftrightarrow y = Py \Leftrightarrow \|y\| = \|Py\|$.

$y \in \operatorname{Im}P \xRightarrow[\text{δείξαμε}]{\text{το}} y = Py \xRightarrow{\text{προφ.}} \|y\| = \|Py\|$

Έστω $\|y\| = \|Py\|$ τότε θυμόμαστε ότι $\underset{}{\overset{\in \operatorname{Im}P}{Py}} \perp \overset{\in \ker P}{y - Py}$

$\Rightarrow \|y\|^2 = \|Py + (y-Py)\|^2 \overset{\text{Π.Θ}}{=} \|Py\|^2 + \|(y-Py)\|^2$

Αλλά, $\|y\| = \|Py\|$, άρα $\|y - Py\|^2 = 0 \Rightarrow y = Py$

$\mathcal{P}(H) = \{P \in \mathcal{B}(H) : P = P^2 = P^*\}$ = οι ορθές προβολές, $S(H)$ = οι κλειστοί υπόχωροι

$P \longrightarrow \operatorname{Im}P$

$P_M \longleftarrow M$

$0 \longrightarrow \{0\}$

$I \longrightarrow H$

$(I-P) \longrightarrow (\operatorname{Im}P)^{\perp}$

+

·Η απεικόνιση $P \to \mathrm{Im}P$ διατηρεί τη διάταξη:

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, ΤΑΕΙ:

1. $P \leq Q$ 2. $\|Px\| \leq \|Qx\|$ $\forall x \in H$ 3. $\mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$

4. $QP = P$ 5. $PQ = P$

Γ

• "διατηρεί τη διάταξη" δηλ $P \leq Q \Leftrightarrow \mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$.

$P \leq Q \Leftrightarrow \forall x \ \|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle = \|Qx\|^2 \ (\leq \|x\|^2)$ $(1 \Leftrightarrow 2)$

$(2 \Rightarrow 3)$
$\Rightarrow$ Παίρνουμε $x \in \mathrm{Im}P$ τότε $x = Px$ άρα $\|x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|Qx\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \|Qx\|^2 \overset{(ii)}{\Rightarrow} x = Qx$ άρα $x \in \mathrm{Im}Q$.

$(3 \Rightarrow 4)$
·Έστω $\mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q$ τότε $QP = P$.

$\forall x \in H$ $Px := y \in \mathrm{Im}P \subseteq \mathrm{Im}Q \Rightarrow QPx = Px \Rightarrow QP = P$

$(4 \Rightarrow 5)$
• Αν $QP = P \Rightarrow (QP)^* = P^* \Rightarrow PQ = P$ $\rightsquigarrow P = P^2 \geq 0 \Rightarrow P = P^*$

$(5 \Rightarrow 1)$
·Αν $PQ = P$ δδο $\langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle$ $\forall x$ $_{\|P\| \leq 1}$

$\hookrightarrow \|PQx\| \leq \|P\|\|Qx\| \leq \|Qx\|$

$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 = \|PQx\|^2 \leq \|Qx\|^2 = \langle Qx, x\rangle$