• Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση $f_x : E \to \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x \rangle$.

Η f_x είναι γραμμική & συνεχής.

Έστω $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$. Σταθεροποιούμε $x \in E$ & θεωρούμε $\begin{array}{l} E \to \mathbb{C} \\ f_x : y \mapsto \langle y, x \rangle \end{array}$ γραμμική & συνεχής

$$|\langle y, x \rangle| \leq \|y\| \|x\|.$$

$y_n \to y$, τότε $|f_x(y_n) - f_x(y)| \overset{f_x}{\underset{\gamma\rho.}{=}} |f_x(y_n - y)| = |\langle y_n - y, x \rangle| \underset{C-S}{\leq} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} \|x\|$

Μάλιστα: $f_x(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 0$ ανν $x = 0$.

$\{f_x : x \in E\}$ οικογένεια γραμμ + συνεχών απεικονίσεων, που καθορίζει την $\|x\|$ με την έννοια ότι $\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in E, \|y\| = 1\} = \sup\{|f_y(x)| : y \in E, \|y\| = 1\}$

διότι αφενός $\forall y \in E$, $\|y\| = 1$ $|f_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| = \|x\|$ & αφετέρου, αν $(x \neq 0)$ βάλουμε $y_0 = \frac{x}{\|x\|}$, $|f_{y_0}(x)| = |\langle x, \frac{x}{\|x\|} \rangle| = \|x\|$. $\left(\langle x, \frac{x}{\|x\|} \rangle = \frac{1}{\|x\|} \langle x, x \rangle = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} \right)$

Ειδικότερα, η $\{f_x : x \in E\}$ χωρίζει τον E διότι αν $y_1 \neq y_2$ τότε μπορούμε να βρούμε $x = y_1 - y_2$: $f_x(y_1) \neq f_x(y_2)$.

Πχ. $E = (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ με εσ.γιν., $f : c_{00} \to \mathbb{C}$

$$x = (x(n)) \mapsto \sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k} x(k) \qquad \forall x \in c_{00}.$$

Έχουμε δείξει ότι είναι γραμμική & συνεχής αλλά $\nexists y \in c_{00}$ με $f(x) = \langle x, y \rangle$

Σε πλήρεις χώρους, τέτοια προβλήματα ΔΕΝ συμβαίνουν.

• Θεώρημα Riesz: Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική & συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλ

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H.$$

Απόδειξη: Έστω $f : H \to \mathbb{K}$ γραμμ & συνεχής.

Αν $f = 0$, τότε ok: $f(x) = \langle x, 0 \rangle$ $\forall x \in E$

Αν όχι, ονομάζουμε $M = \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$

f γραμμ $\Rightarrow$ M γραμμικός υπόχωρος

f συνεχής $\Rightarrow$ M κλειστός

$f \neq 0$ $\Rightarrow$ $M \neq H$

Άρα (από το βασικό Θεώρημα) $\exists z \in H, z \neq 0, z \perp M$.

Παίρνουμε ένα τυχαίο $x \in H$ & παρατηρούμε ότι:

$f(xf(z) - zf(x)) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0$. Οπότε $\forall x \in H$, $xf(z) - zf(x) \in \ker f = M$

Άρα $\langle xf(z) - zf(x), z \rangle = 0 \Rightarrow f(z)\langle x, z\rangle - f(x)\langle z, z\rangle = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{f(z)}{\langle z, z\rangle}\langle x, z\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f_y(x)$, όπου $y = \dfrac{z\overline{f(z)}}{\|z\|^2}$

Μοναδικότητα: Αν $\left.\begin{array}{l} f(x) = f_{y'}(x) \ \forall x \in H \\ \text{τότε} \ = f_y(x) \ \forall x \in H \end{array}\right\} \Rightarrow$ άρα θέτοντας $x = y - y'$ βρίσκουμε $x = 0$ διότι $\underbrace{\langle y-y', y'\rangle}_{f_{y'}(y-y')} = \underbrace{\langle y-y', y\rangle}_{f_y(y-y')} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle y-y', y'-y\rangle = 0 \Rightarrow \|y'-y\| = 0$ $\perp$

$\langle y-y', y'\rangle - \langle y-y', y\rangle$

Υπενθύμιση: Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή:

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \neq 0$.

Το X είναι (αλγεβρική) βάση του V αν η γραμμική του θήκη $span(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν: 1. είναι ορθοκανονική &
2. η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{span\{e_i : i \in I\}} = E$.

⚠ Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι γενικώς αλγεβρική βάση (πχ. στον ℓ^2).

$E = (c_{00}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, \overset{n\text{-θέση}}{1}, 0, \dots)$. Ξέρουμε ότι είναι $\overset{\text{(βάση)}}{\text{ορθ/κά}}$. Επίσης, $\forall x = x(n) \in c_{00}$ γράφεται $x = \sum_{k=1}^{n_x} x(k) e_k$. $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθ/κή βάση αλλά $\underline{\underline{\&}}$ αλγεβρική βάση.

Όμως, $E = (\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ πάλι $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\overset{\text{(βάση)}}{\text{ορθ/κά}}$ & $span\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = c_{00} \neq \ell^2$

Όμως, $\overline{span\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_2} = \ell_2$. Άρα $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ΟΚΒ του ℓ^2, αλλά ΔΕΝ είναι αλγεβρική βάση.

SoS (μπαίνει άσκηση): Σε χώρο Hilbert H, $\dim H = \infty$ μια ορθική αριθμήσιμη ακολουθία ΔΕ μπορεί να είναι ορθική βάση.

(ΟΚΣ → ορθικό σύστημα, ΠΟΚΣ → πλήρες ΟΚΣ) ⊥

• Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H. Η $\mathcal{C}$ είναι βάση του H ανν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathcal{C}$ είναι το 0.

Γ. Έστω $\mathcal{C} \subseteq H$ ορθική οικογένεια.

• Αν $\exists z \in H$, $z \neq 0$, $z \perp \mathcal{C} \Rightarrow \{\frac{z}{\|z\|}\} \cup \mathcal{C}$ ορθική οικογένεια, οπότε η $\mathcal{C}$ δεν είναι μεγιστική.

• Αν $\mathcal{C}$ δεν είναι μεγιστική, τότε $\exists e \in H$: $\mathcal{C} \cup \{e\}$ ορθική (μοναδιαίο), οπότε $e \neq 0$ γιατί $\|e\| = 1$ κι $e \perp \mathcal{C} \Rightarrow e \perp \overline{\operatorname{span}\mathcal{C}} \Rightarrow \overline{\operatorname{span}\mathcal{C}} \neq H$, οπότε $\mathcal{C}$ δεν είναι ορθική βάση του H.

⊙ Αν $\mathcal{C}$ δεν είναι ΟΚΒ του H, τότε ο $\overline{\operatorname{span}\mathcal{C}}$ είναι γνήσιος υπόχωρος κλειστός του H: Hilbert. Άρα $\exists z \in H$, $z \neq 0$, $z \perp \overline{\operatorname{span}\mathcal{C}}$. ⊥

• Κάθε διαχωρίσιμος χώρος E με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθική βάση (κι αντίστροφα).

Το εξής ισχύει κι σε μη διαχωρίσιμους χώρους.

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθική βάση του E μέσα στον F (πχ. $E = C([0,1])$ κι F = πολυώνυμα).

Γ. Έστω E διαχωρίσιμος χώρος (δηλ. $\exists \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό $\subseteq E$) κι $F \subseteq E$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος. Θδο $\exists \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθική βάση του E με $f_n \in F$.

Ο F είναι κι αυτός διαχωρίσιμος (από Πραγματική). Οπότε $\exists \mathcal{G} \subseteq F$ πυκνό, αριθμήσιμο. ($\mathcal{G} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$.) Εφαρμόζουμε "κόσκινο":

$\exists \mathcal{U} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $\operatorname{span}\mathcal{U} = \operatorname{span}\mathcal{G}$. Ονομάζουμε u_1 το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο g_{n_1} της $\mathcal{G}$ κι θεωρούμε τα $\{g_{n_1}, g_n\}$ μεταξύ. Ονομάζουμε g_{n_2} το πρώτο n ώστε $\{g_{n_1}, g_n\}$ γραμμ. ανεξ. κι θέτουμε

$u_2 = y_{n_2}$. Συνεχίζουμε επαγωγικά κ' προκύπτει μια γραμμικά ανεξάρτητη οικογένεια $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots\} \subseteq \mathcal{G}$ με $\operatorname{span}\mathcal{U} = \operatorname{span}\mathcal{G} \subseteq F$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\operatorname{span}\mathcal{U}} \supseteq \overline{\mathcal{G}} = H$. Τώρα στην $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots\}$ κάνουμε Gram-Schmidt κ' προκύπτει αριθμή ορθική οικογένεια $\mathcal{f} = \{f_1, f_2, \dots\}$ τ.ω $\operatorname{span}\mathcal{f} = \operatorname{span}\mathcal{U}$

Οπότε, $\overline{\operatorname{span}\mathcal{f}} = \overline{\operatorname{span}\mathcal{U}} \supseteq \overline{\mathcal{G}} = H$, δηλ. η $\mathcal{f}$ είναι ορθική βάση του H που $\mathcal{f} \subseteq F$.

Αντίστροφα, αν ένας χώρος με εσωτερικό γιν. E έχει αριθμήσιμη, ορθική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε είναι διαχωρίσιμος.

Ονομάζουμε $F = \{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_{n_k}$ όπου $m \in \mathbb{N}$ κ' $\lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$ (δηλ $\operatorname{Re}\lambda_k, \operatorname{Im}\lambda_k \in \mathbb{Q}$)

Το F είναι αριθμήσιμο (από Πραγματική) κ' είναι πυκνό στον E διότι αν πάρουμε $x \in E$ κ' $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\sum_{k=1}^{m} c_k x_k = y$, όπου $c_n \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $\|x - y\| < \varepsilon/2$, διότι $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = E$. Τώρα που έχουμε $c_1, c_2, \dots, c_m$ (πεπερασμένο πλήθος), μπορούμε $\forall k = 1, \dots, m$ να βρούμε $\lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$: $|\lambda_k - c_k| < \frac{\varepsilon}{2m}$. Οπότε (πράξεις) $\|x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + m\frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon$. $\dashv$

• Άσκηση: Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E. Τότε, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ ανν $x \in \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Μάλιστα, $\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \operatorname{dist}(x, K)^2$, όπου $K = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Μια Απόδειξη: Έστω $x \in \overline{K}$ κ' $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ κ' $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε $\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| < \varepsilon$. Όμως, πάντα $\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|^2 \geq \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2$. Αλλά, ξέρουμε (Πυθαγόρειο) $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 < \varepsilon^2$.

Αν $m \geq n$, έχουμε $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$ κ' συνεπώς

$$\|x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall m \geq n.$$

Επομένως, $\lim_m \|x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k\| = 0$ κ' $\lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$.

• Έστω $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ'έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, $\forall x\in E$,

i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$ (σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E)

ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (Ισότητα Parseval)

Γ ii). Έστω $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ΟΚ βάση του E.

$\forall x\in E \quad x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ (συγκλίνει $\|\cdot\|$)

$\forall y\in E \quad \langle x,y\rangle = \langle \sum \langle x, e_k\rangle e_k, y\rangle = \sum \langle\langle x, e_k\rangle e_k, y\rangle = \sum \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle =$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: γραμμ + συνεχές

$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle}$ → για $y=x$ έχω τη Parseval.

• Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ'ένα χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x\in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

→ Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, e_n\rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2. (Άρα ο E έχει μια πλήρωση που είναι χώρος Hilbert.)

Γ. Έστω $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Επιλέγουμε μια βάση ορθοκανονική $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ ($\exists$ τέτοια διότι έχουμε υποθέσει ότι E διαχωρίσιμος.)

$$U : \underset{\in E}{x} \longmapsto \left(\langle x, x_k\rangle\right)_{k=1}^{\infty}$$

$\in \ell^2$ → διότι $\sum_k |\langle x, x_k\rangle|^2 < +\infty$

U καλά ορισμένη, γραμμική (προφ.)

Parseval: $\|x\|_E^2 = \|Ux\|_{\ell^2}^2 \quad \Rightarrow U$ ισομετρία

• $U(E) \subseteq \ell^2$ πυκνός υπόχωρος διότι $U(x_k) = (0,0,\dots,0,\overset{k\text{-θέση}}{1},0,0,\dots)$

Άρα η συνήθης ορθή βάση του ℓ^2 είναι στην $U(E) \Rightarrow c_{00} \subseteq U(E)$

Αλλιώς: Πάρε όποια $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots) \in c_{00}$ θέλεις κ' όρισε $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in E \Rightarrow U(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots)$ άρα $c_{00} \subseteq U(E)$.

Δηλ. U: γραμμ. ισομετρία με πυκνή εικόνα.

Ερώτηση: $U(E) \overset{?}{=} \ell^2$ $\rightsquigarrow$ ΟΧΙ

- Όταν ο E είναι ΠΛΗΡΗΣ ισχύει.

Αν $U(E) = \ell^2 \Rightarrow E = U^{-1}(\ell^2)$ τότε είναι πλήρης.

(διότι αν (y_n) βασική στον E, τότε $U(y_n)$ βασική στον ℓ^2 άρα $\exists\, z = \lim_n U(y_n)$ οπότε $y_n \to U^{-1}(z)$.)

• Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2. Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H, η απεικόνιση $U : H \twoheadrightarrow \ell^2 : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$ απεικονίζει τον H (γραμμικά κ') ισομετρικά επί του ℓ^2.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει κ' για μη διαχωρίσιμους χώρους.

Μένει ν.δ.ο U επί. Μου δίνουν μια τυχαία (λ_n) του ℓ^2 (δηλ $\lambda_n \in \mathbb{K}$ κ' $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$) κ' θέλω να βρω ένα $x \in E$ ώστε $\langle x, x_n \rangle = \lambda_n \ \forall n = 1, 2, \dots$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots) \in \ell^2$. $\forall n \in \mathbb{N}$ ονομάζω $y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in E$ ήδη έχω ελπίδες διότι $U(y_n) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$. Θέλω ν.δ.ο $\exists\, y \in E$: $\|y_n - y\|_E \to 0$, οπότε θα έχω τελειώσει διότι $\|U(y_n) - U(y)\|_{\ell^2} \to 0$, άρα $U(y) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$. Α.ν.δ.ο (y_n) βασική:

$n > m$: $\|y_n - y_m\|_E^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \right\|_E^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k x_k \right\|_E^2 \overset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{m<k\leq n} |\lambda_k|^2$ ⊛

αλλά, αφού $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty \Rightarrow$ τα μερικά αθροίσματα $S_n = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$ είναι βασική ακολουθία: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0$: $n, m \geq n_0$: $|S_n - S_m| < \varepsilon^2$. Άρα από ⊛: $\|y_n - y_m\|_E^2 < \varepsilon^2$.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\exists$ (από Zorn) ΟΚ βάση $\{x_i : i \in I\}$ του E, οπότε $\sum_{i \in I_0} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

$\forall I_0 \subseteq I$ πεπερ/νο $\Rightarrow \sup_{\substack{I_0 \subseteq I \\ \text{πεπ/νο}}} \left(\sum_{i \in I_0} |\langle x, x_i \rangle|^2 \right) \leq \|x\|^2$ (μάλιστα "=")

Άρα, $\forall x \in E$ $(\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}$ είναι στον $\ell^2(I)$. Ονομάζω $U : x \mapsto (\langle x, x_i \rangle)_{i \in I}$ είναι ισομετρία. Όταν ο E είναι πλήρης, αποδεικνύεται ανάλογα με την προηγούμενη ότι η U είναι επί.

• Αν $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ κ' γραμμική κ' ισομετρική εμφύτευση $\phi: E\to H$ με πυκνή εικόνα. Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος Hilbert κ' $\psi: E\to K$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H επί του K ώστε $T(\phi(x))=\psi(x)$ $\forall x\in E$. Ο χώρος Hilbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται η πλήρωση του $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id"'] & \phi(E) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H=\overline{\phi(E)} \arrow[d, "T"] \\
E \arrow[r] & \psi(E) \arrow[r] & K=\overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}$$

• <u>Χωρίς Μέτρο</u>: Θεωρώ τον $E=(C([a,b]),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ όπου $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$.
Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Θεωρώ τον $F=(C_c(\mathbb{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ όπου $f\in C_c(\mathbb{R})$ ανν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής κ' υπάρχει $K_f\subseteq\mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t)=0$ όταν $t\notin K_f$. Θέτω $\langle f,g\rangle=\int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}\,dt$. Ονομάζω $L^2(\mathbb{R})$ την πλήρωση του F.

~Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι ορισμοί των χώρων Hilbert $L^2([a,b])$ κ' $L^2(\mathbb{R})$.

Ενημερωτικά παρατίθενται παρακάτω οι ορισμοί από τη Θ. Μέτρου.

<u>Με Μέτρο</u>: Έστω $(X,\mathcal{S},\mu)$ χώρος μέτρου (πχ. $[a,b],\mathcal{B},\lambda$)

• Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{S},\mu)=\mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f:X\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ (ή $f:X\to\mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες κ' ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu<+\infty$. Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N}=\{f\in\mathcal{L}^2(\mu):\|f\|_2=0\}$. Αν $f,g\in\mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f=g$ μ-σ.π. $\Leftrightarrow f-g\in\mathcal{N}$.
Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2$. Θέτω $\|f+\mathcal{N}\|_2:=\|f\|_2$.
Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^2(\mu):=\mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.
Έπεται ότι ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ-σ.π.

• Θεώρημα (Riesz-Fisher): Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f+N, g+N\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}\,d\mu(t)$.

Θεώρημα (πόρισμα πχ του Luzin): Ο $C([a,b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a,b],\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.)

· Τρία πράγματα για τους χώρους Hilbert:

1. Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.
2. Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.
3. Ύπαρξη ορθής βάσης $\{x_i : i\in I\}$. (Άρα ισομορφικός με $\ell^2(I)$).

Ισομορφισμοί:

• Έστω $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ διαχωρίσιμος. Τότε κάθε επιλογή μιας ορθής ακολουθίας $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq E$ ορίζει μια ισομετρία (άρα 1-1)

$$V:\ell^2\to E,\quad (\lambda_n)\mapsto \sum\lambda_n x_n$$

{ καλά ορισμένη διότι η $\sum\lambda_n x_n$ συγκλίνει ως προς τη $\|\cdot\|_E$.

Επιπλέον, αν η $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθή ΒΑΣΗ του E κι ο E είναι πλήρης, τότε η V είναι κι επί!

Παραδείγματα:

1 $(C([0,1]),\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$, $\{f_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$, $f_n(t)=t^n$

$\langle f_n,f_m\rangle=\int_0^1 t^{n+m}\,dt$ όχι ορθή, είναι όμως γρ. ανεξάρτητη.

Άρα, Gram-Schmidt: $\underbrace{\{f_n:n\in\mathbb{Z}_+\}}_{\text{γρ. ανεξ.}} \rightsquigarrow \{h_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ ορθή τ.ω

$[f_1,..,f_n]=[h_1,..,h_n]\ \forall n$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Είναι η $\{h_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ ορθοκανονική βάση?

$\iff \overline{\mathrm{span}\{h_n:n\in\mathbb{Z}_+\}}^{\|\cdot\|_2} \supseteq C([0,1])$ ή είναι αλήθεια ότι $\forall f\in C([0,1])$

$\forall\varepsilon>0\ \exists p$ πολυώνυμο $: \|f-p\|_2<\varepsilon$?

Υπενθύμιση: (Θ. Weierstrass) $\forall\varepsilon>0\ \exists p$ πολυώνυμο: $\|f-p\|_\infty<\varepsilon$.

$\Rightarrow \|f-p\|_2^2=\int_0^1|f(t)-p(t)|^2dt \le \sup|f(t)-p(t)|^2(1-0)=\|f-p\|_\infty^2$ ορθή

Άρα, και είναι ορθή βάση η $\{h_n:n\in\mathbb{Z}_+\}$ του χώρου, αποτελούμενη από πολυώνυμα.

• Η ορθή οικογένεια $\{h_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ που προκύπτει από τα $\{f_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$, $f_n(t)=t^n$, με Gram-Schmidt είναι ορθή βάση του $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$.

Εκεί έχουμε ορίσει: $L^2([0,1]) =$ πλήρωση $(C([0,1]), \|\cdot\|_2)$.

Η $\{h_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ είναι ορθή κ' στον $L^2([0,1])$.

Ισχυρισμός: Είναι ορθή ΒΑΣΗ του $L^2([0,1])$

Έστω $g\in L^2([0,1])$. $\forall \varepsilon>0\ \exists f\in C([0,1]) : \|g-f\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$

Όμως, από τα προηγούμενα, $\exists\, p\in \text{span}\{h_n : n\in\mathbb{N}\}$ πολυώνυμο: $\|f-p\|_2<\frac{\varepsilon}{2}$.

Άρα, $\|g-p\|_2<\varepsilon$.

2. $(C([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$, $\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt$

Σύνολο: $e_n(t)=e^{int}=\cos nt + i\sin nt$

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ \frac{2\pi}{2\pi}=1, & n=m\end{cases}$$

Έχουμε $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ ορθή ακολουθία στον $L^2([-\pi,\pi])$

Είναι αυτή ορθή βάση του $L^2([-\pi,\pi])$;

ΝΑΙ. Θεώρημα Fejez ή Θ. Stone-Weierstrass.

Συνεπάγεται
$$L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$$
$$f \mapsto (\langle f, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{Z}}$$
είναι ισομετρία επί.

κ' οι συντελεστές είναι $\langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt = \hat{f}(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ (συντελεστής Fourier)

• Υπενθύμιση: Έστω E, F γραμμικοί χώροι, $T: E\to F$ γραμμική: $T(x+\lambda y)=T(x)+\lambda T(y)$ $\forall x,y\in E, \lambda\in\mathbb{K}$.

• Αν $(E, \|\cdot\|_E)$ κ' $(F, \|\cdot\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα κ' $T: E\to F$ γρ. απεικόνιση, ΤΑΕΙ:

1. Η T είναι συνεχής.
2. Η T είναι συνεχής στο $0\in E$.
3. Η T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του E.
4. $\exists M<\infty : \|Tx\|_F\leq M\|x\|_E$ $\forall x\in E$.
5. Ο περιορισμός της T στην μοναδιαία μπάλα του E είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_F : \|x\|_E\leq 1\}$ είναι φραγμένο.
6. Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

1 ⇒ 2 Προφανές

2 ⇒ 3 Έστω $x_n\to x_0$. Ορίζω $y_n := x_n - x_0$ κ' $y_n\to x_0-x_0=0$

Από (2) $Ty_n\to T(0)=0 \Rightarrow T(x_n-x_0)\to 0 \xRightarrow[\text{γρ}]{T} T(x_n)\to T(x_0)$.

6 ⇒ 1 Άμεσο

Γ 3 $\Rightarrow$ 4: Αν T συνεχής στο x_0, τότε $\exists \delta > 0 : \forall z \in E$ με $\|z - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|Tz - Tx_0\|_F < 1$

Όμως, $\forall\, y \in E$ $(y \neq 0)$ αν θέσουμε $z = \frac{\delta y}{2\|y\|} + x_0$ τότε $\|z - x_0\| = \left\| \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$

Οπότε $\left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|} + x_0\right) - T(x_0) \right\| < 1$ και $\left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| = \frac{2}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta y}{2\|y\|} + x_0\right) - T(x_0) \right\| < \frac{2}{\delta}$

$\Rightarrow \forall y \neq 0$ $\|T(y)\| \leq \frac{2}{\delta} \|y\|$ Προφανώς κ' για $y = 0$.

Δείξαμε, ότι $\forall y \in E$ $\|T(y)\| \leq M \|y\|$, όπου $M = \frac{2}{\delta}$.

4 $\Rightarrow$ 5: $\|Ty\|_F \leq M \|y\|_E$ $\forall y \in E$ $\xRightarrow{\text{προφ.}}$ $\sup\{\|Ty\|_F : \|y\|_E \leq 1\} \leq M < +\infty$.

Άρα, ο περιορισμός $T|_{B_E(0,1)}$ είναι φραγμένη συνάρτηση (από το M).

5 $\Rightarrow$ 6.: Υπόθεση: $\sup\{\|Ty\|_F : \|y\|_E \leq 1\} := N < +\infty$. Τότε παίρ. $y, x \in E$ με $x \neq y$

$Ty - Tx = \frac{T(y-x)}{\|y-x\|} \|y-x\| = T\left(\frac{y-x}{\|y-x\|}\right) \|y-x\|$, αλλά $\frac{y-x}{\|y-x\|} \in B(0,1)$, άρα

Lipschitz $\Rightarrow$ Ομ. συνέχεια

$\left\| T\left(\frac{y-x}{\|y-x\|}\right) \right\| \leq N$. Δείξατε ότι $\forall x, y \in E$, $x \neq y$ $\|Tx - Ty\| \leq N \|x - y\|$.

Προφανώς ισχύει κ' για $x = y$, άρα $\forall \varepsilon > 0$ παίρνω $\delta = \frac{\varepsilon}{19N}$ κ' είμαι OK.

~

Δείξαμε ότι T συνεχής $\Leftrightarrow \|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_E\} < +\infty$

\# $\forall x \in E, x \neq 0$ έχουμε $\frac{x}{\|x\|} \in B_E$ άρα $\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|T\|$ $\xRightarrow{\text{γραμμ.}}$ $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$

κ' ισχύει κ' για $x = 0$ (ακόμα κ' αν $\|T\| = +\infty$).

Οπότε αν $x, y \in E$ έχουμε $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq \|T\| \|x - y\|$

Άρα αν $\|T\| < +\infty$, η T είναι (ομοιόμορφα) συνεχής, άρα συνεχής στο 0.

Αντίστροφα, αν $\|T\| = +\infty$, τότε η T δεν είναι συνεχής στο 0.

Πράγματι, $\forall n$, αφού $\sup\{\|Tx\| : x \in B_E\} > n$ $\exists x_n \in B_E$ με $\|Tx_n\| > n$

οπότε $\left\| T\left(\frac{x_n}{n}\right) \right\| > 1$. Όμως, αν $y_n := \frac{x_n}{n}$ έχουμε $\|y_n\| = \frac{1}{n} \|x_n\| \leq \frac{1}{n}$

Άρα $y_n \to 0$, ενώ $Ty_n \not\to 0$.

Συμπέρασμα: T συνεχής στο $0 \Rightarrow \|T\| < +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x, y$: $\|Tx - Ty\| \leq \|T\| \|x - y\| \Rightarrow T$ ομοιόμορφα συνεχής.

\# Καμία γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλο το χώρο.

• Μια γραμμική απεικόνιση $T:(E,\|\cdot\|_E)\to(F,\|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής αν η T απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του E σε φραγμένα υποσύνολα του F. Ισοδύναμα, αν ο περιορισμός της T στην μοναδιαία μπάλα του E είναι φραγμένη συνάρτηση.

⤳ Αν $T:E\to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x\in E,\ \|x\|_E\le 1\}\in[0,+\infty].$$

Η T είναι φραγμένη ανν $\|T\|<+\infty$.

• Αν $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα κ' $T:E\to F$ φραγμένος τελεστής τότε $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x\in E,\ \|x\|_E=1\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x\in E,\ x\neq 0\right\} =$ αυτές οι σχέσεις ισχύουν κ' για μη φραγμένους τελεστές

$= \inf\{k>0 : \|Tx\|_F\le k\|x\|_E\ \forall x\in E\}$.

Επιπλέον, ισχύει $\|Tx\|_F\le\|T\|\,\|x\|_E\ \ \forall x\in E$. (T συνεχής ⟺ T φραγμένη)

• Έστω $(E,\|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F,\|\cdot\|_F)$ χώρος Banach, D πυκνός υπόχωρος του E κ' $T:D\to F$ γραμμική απεικόνιση. Η T δέχεται συνεχή επέκταση $T_1:E\to F$, δηλ. $T_1|_D=T$ ανν είναι συνεχής. Η επέκταση T_1 είναι μοναδική (αν υπάρχει) κ' $\|T_1\|=\|T\|$.

(⟹) Προφανώς. (Αν ∃ συνεχής $\tilde{T}$ επέκταση, τότε $T=\tilde{T}|_D$ συνεχής)

(⟸) Έστω T συνεχής, δηλαδή φραγμένη. Θέλουμε να ορίσουμε $\tilde{T}(x)$ σε όλα τα $x\in E$. Έστω $x\in E$. Αφού D πυκνός στον E, ∃ (x_n), $x_n\in D$: $\|x_n-x\|\to 0$. Θέλουμε να ορίσουμε $\tilde{T}(x)=\lim_n T(x_n)$

Δύο προβλήματα: → ∃ το όριο;

→ Μήπως εξαρτάται όχι μόνο απ' το x, αλλά κ' απ' την (x_n);

(x_n) συγκλίνει ⟹ (x_n) βασική

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : \forall n,m\ge n_0\ \|x_n-x_m\|_E<\frac{\varepsilon}{\|T\|}$ (ξέρουμε ότι $\|T\|<+\infty$, διότι T συνεχής)

οπότε $\|Tx_n-Tx_m\|_F \overset{\text{γραμμ}}{=} \|T(x_n-x_m)\|_F\le\|T\|\,\|x_n-x_m\|_E<\varepsilon$ Δηλ. ∃ $y_{(x_n)}$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση του x

Δείξαμε ότι η (Tx_n) βασική στο F. Επομένως, το $\lim_n Tx_n$ υπάρχει (γιατί F Banach ⟹ Tx_n συγκλίνει) κ' το ονομάζουμε $y_{(x_n)}$. # Το $y_{(x_n)}$ εξαρτάται μόνο απ' το x. Διότι αν (x_n') ακολουθία του D με $\|x_n'-x\|_E\to 0$, τότε $\|Tx_n-Tx_n'\|=\|T(x_n'-x_n)\|\le$ $\le\|T\|\,\|x_n'-x_n\|\to 0$. Οπότε $\lim Tx_n'=\lim Tx_n=y_{(x_n)}$.

Έχουμε λοιπόν $E \to F$
$x \mapsto y_x := \lim_n Tx_n \ \forall (x_n)$ του D με $x_n \to x$.

Είναι γραμμική διότι αν κοιτάξουμε ένα $x+\lambda y' \in E$, πάρε $x_n \to x$ κ' $x_n' \to x'$ με $x_n, x_n' \in D$, τότε $T(x_n) \to y_x$ κ' $T(x_n') \to y_{x'}$. Άρα $T(x_n)+\lambda T(x_n') \longrightarrow y_x + \lambda y_{x'}$, αλλά $T(x_n)+\lambda T(x_n') \overset{\text{γραμμ}}{=} T(x_n+\lambda x_n')$ κ' επειδή $x_n+\lambda x_n' \to x+\lambda x'$, έχουμε ότι $T(x_n+\lambda x_n') \to y_{x+\lambda x'}$. $\Rightarrow y_x+\lambda y_{x'} = y_{x+\lambda x'}$.

Θέτουμε λοιπόν $\tilde{T}(x) = y_x$ κ' έχουμε γραμμική απεικόνιση $\tilde{T}: E \to F$.

Ισχύει $\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\| \ \forall x \in E$.

Πράγματι, αν πάρουμε οποιαδήποτε (x_n) του D με $x_n \to x$, από τον ορισμό της $\tilde{T}$, έχουμε $Tx_n \to \tilde{T}x$. Άρα, $\|\tilde{T}x\| = \lim_n \|Tx_n\|$ κ' $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$. Άρα, $\|\tilde{T}x\| \leq \lim_n \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|x\|$. Άρα $\tilde{T}$ είναι φραγμένος τελεστής κ' μάλιστα $\|\tilde{T}\| = \inf\{k>0 : \|\tilde{T}x\| \leq k\|x\| \ \forall x \in E\} \leq \|T\|$.

Όμως, η $\tilde{T}$ είναι επέκταση της T (διότι αν $x \in D$ μπορούμε να πάρουμε $(x_n) : x_n = x \ \forall n$, οπότε $\tilde{T}(x) = \lim_n Tx_n = Tx$) Οπότε,

$\|\tilde{T}\| = \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \geq \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in D, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in D, \|x\| \leq 1\} =$
$= \|T\|$. Άρα, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Μοναδικότητα: Δύο συνεχείς επεκτάσεις $\tilde{T}$ κ' T' της T στον E ταυτίζονται στον D που είναι πυκνός, άρα παντού, αφού είναι συνεχείς. ⌋

Αρκεί να είναι μόνο ο E πεπερ. διάστασης.

- Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T: E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, .., e_m\}$ του E κ' $\{f_1, .., f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$, $i=1,..,n$, $k=1,...,m$.

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T: E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

⌈ $\forall k=1,..,m$ θέτουμε $T(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} f_i$. Επεκτείνουμε γραμμικά: $\forall x \in E$ $x = \sum_{k=1}^m \langle x, e_k \rangle e_k$ κ' ορίζουμε $Tx = \sum_{k=1}^m \langle x, e_k \rangle Te_k = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ik} \langle x, e_k \rangle f_i$. Εσωτερικοποιούμε με f_j :

$$\langle Tx, f_j\rangle = \sum_{k\geq i} a_{ik}\langle x, e_k\rangle \underbrace{\langle f_i, f_j\rangle}_{\delta_{ij}} \xrightarrow[\text{γιατί είναι ΟΚ βάση}]{\text{ενώνει όλα τα } i \text{ κι μένει το } j} \langle Tx, f_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\langle x, e_k\rangle$$

Με άλλα λόγια:

$$Tx = \begin{bmatrix} \langle Tx, f_1\rangle \\ \vdots \\ \langle Tx, f_n\rangle \end{bmatrix} = [a_{ik}] \begin{bmatrix} \langle x, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_m\rangle \end{bmatrix}$$

$\perp$

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T: \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθική βάση του ℓ^2.

ΔΕΝ ισχύει όμως το αντίστροφο.

$\forall\, T: \ell^2 \to \ell^2$ γραμμικό, ορίζουμε $[a_{ik}] = [\langle Te_k, e_i\rangle] : i, k \in \mathbb{N}$ $\infty\times\infty$ πίνακα

Σταθεροποιώ ένα k, $(\langle Te_k, e_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}}$ πρέπει να $\in \ell^2$, δηλ. $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_i\rangle|^2 < +\infty$.

Άρα, ΔΕΝ ορίζει $\forall$ πίνακα $[a_{ik}]$ έναν τελεστή.

πχ. $[a_{ik}] = 1 \;\; \forall i \,\forall k$ ΔΕΝ δουλεύει.

Weierstrass: $\forall f \in C([0,1])\ \exists\ (p_n)$ πολυώνυμα : $\|f - p_n\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow \|f - p_n\|_2 \to 0$ άρα $\exists$ μια ορθική βάση του $L^2([0,1])$ από πολυώνυμα $\{h_n : n = 0,1,2,\dots\}$. $\forall f \in L^2([0,1])$ $f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, h_n\rangle h_n$ (σύγκλιση ως προς $\|\cdot\|_2$)

οπότε $\forall f \in C([0,1])$, αν θέσουμε $q_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f, h_k\rangle h_k$, έχουμε $\|f - q_n\|_2 \to 0$.
πολυώνυμο.

$q_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^1 f(t)\overline{h_k(t)}\,dt\right) h_k$. $\lrcorner$

• Διαγώνιοι τελεστές: Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 ανν $(a_n) \in \ell^\infty$ κι τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).

Μας δίνουν $(a_n) : a_n \in \mathbb{C}$ κι θέλουμε να ορίσουμε $T: \ell^2 \to \ell^2$ με πίνακα

$$\mathrm{diag}(a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$ ΔΕ ΓΙΝΕΤΑΙ ΠΑΝΤΑ!

πχ. $a_n = n\ \forall n$ τότε, ενώ $x = \left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^2$ το $(a_n x(n)) = (1,1,1,\dots) \notin \ell^2$.

Θέλουμε συνθήκη στο $a=(a_k)$ ώστε $T=D_a$ να στέλνει τον ℓ^2 μέσα στον ℓ^2. Πρέπει κ̇ αρκεί $\forall x=(x(n))\in\ell^2$ να ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k x(k)|^2<+\infty$.

Αρκεί η $a=(a(n))$ να είναι φραγμένη διότι τότε:

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n x(n)|^2\leq \sup|a_n|^2\sum_{n=1}^{N}|x(n)|^2\leq \|a\|_\infty^2\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^2 \quad \forall N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n x(n)|^2\leq \|a\|_\infty^2\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^2<+\infty$$

Άρα, ο D_a ορίζεται και μάλιστα $\|D_a x\|_2\leq\|a\|_\infty\|x\|_2$ $\forall x\in\ell^2$ είναι φραγμένος τελεστής.

Αντίστροφα, αν ο D_a είναι (κατά ορισμένως) φραγμένος τελεστής, τότε $(a(n))$ φραγμένη. Διότι αν δεν είναι, θα $\exists(a_{k_n})$ υπακολουθία με $|a_{k_n}|>n$ $\forall n$ $\quad (a_1,a_2,\overset{|\cdot|>1}{a_3},\dots,a_n,\overset{|\cdot|>2}{a_{n+1}},\dots$

Τώρα, ορίζουμε $x\in\ell^2$ ως εξής: $x(k_n)=\frac{1}{n}$ κ̇ $x(m)=0$ αν $m\notin\{k_n:n\in\mathbb{N}\}$.
$\sum|x(m)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|x(k_n)|^2<+\infty$. Όμως $(a_m x(m))_{m=1}^{\infty}\notin\ell^2$ γιατί

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_m x(m)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_{k_n}x(k_n)|^2>1+1+1+\dots$$

Δείξαμε ότι όχι μόνο ο D_a δεν είναι φραγμένος τελεστής, αλλά δεν ορίζεται καν σ' όλον τον ℓ^2. Δηλαδή, δείξαμε:

Ενδιαφέρουσα Άσκηση: Αν $\forall(x(n))\in\ell^2$ η $(a_n x(n))\in\ell^2$, τότε αυτομάτως η (a_n) είναι φραγμένη. (οπότε ο D_a είναι φραγμένος τελεστής)

Με άλλα λόγια, ο D_a, αν ορίζεται παντού στον ℓ^2, αυτομάτως είναι φραγμένος τελεστής $\dashv$

Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k\in C([a,b]\times[a,b])$, ορίζουμε

$$(Kf)(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy,\quad f\in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $K:(C([a,b]),\|\cdot\|_2)\to(C([a,b]),\|\cdot\|_2)$ φραγμένο με $\|K\|^2\leq\iint|k(x,y)|^2dxdy$. Άρα επεκτείνεται σε $K:L^2([a,b])\to L^2([a,b])$.

Γ Έστω $\varphi:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής, οπότε $\forall f\in C([a,b])$ $\forall x\in[a,b]$, η $y\mapsto\varphi(x,y)f(y)$ συνεχής. Άρα $\exists$ το $\int_a^b\varphi(x,y)f(y)\,dy:=(Kf)(x)$

Άσκηση: Η $Kf:[a,b]\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Έχουμε ορίσει $K: f \mapsto Kf : C([a,b]) \to C([a,b])$ προφανώς γραμμική.
Θέλουμε να ορίσουμε φραγμένο τελεστή : $L^2([a,b]) \to L^2([a,b]) \iff$
νδο $\exists$ σταθερά $\|\varphi\|_{22}$ ώστε $\forall f \in C([a,b]) : \|Kf\|_2 \leq \|\varphi\|_{22} \|f\|_2$ τότε θα έχουμε
δείξει ότι K φραγμένος τελεστής κ' η $\|K\| \leq \|\varphi\|_{22}$. Οπότε θα δέχεται
μοναδική επέκταση σε φραγμένο τελεστή : $L^2 \to L^2$ με την ίδια νόρμα.

Ν.δ.ο $\exists M : \|Kf\|_2^2 \leq M^2 \|f\|_2^2 \quad \forall f \in C([a,b])$.

$$\|Kf\|_2^2 = \int_a^b |Kf(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \int_a^b \varphi(x,y) f(y) dy \right|^2 dx \quad \text{κ'} \quad \left| \int_a^b \varphi(x,y) f(y) dy \right|^2 \overset{C-S}{\leq} \int_a^b |\varphi(x,y)|^2 dy \underbrace{\int_a^b |f(y)|^2 dy}_{\|f\|_2^2}$$

Αντικαθιστούμε κ' έχουμε:

$$\|Kf\|_2^2 = \int_a^b \left| \int_a^b |\varphi(x,y) f(y)| dy \right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |\varphi(x,y)|^2 dy \right) \|f\|_2^2 \, dx = \underbrace{\int_a^b \left(\int_a^b |\varphi(x,y)|^2 dy \right) dx}_{\|\varphi\|_{22}^2 \text{ αριθμούμε}} \|f\|_2^2$$

Το ίδιο κάνουμε με σειρές. ΔΙΑΦ

$\perp$

• Τελεστές Hilbert-Schmidt: Μια ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T: \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle \ \forall i,k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκριση με τους διαγωνίους).
Έχουμε $(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k)$.

Άρα η σειρά ⊗ συγκλίνει απόλυτα

Γ. Έστω $[a_{ik}]$ $\infty \times \infty$ πίνακας. Θέλουμε $(Tx)(i) = \sum_k a_{ik} x(k)$ (αν $\exists$ το $\sum_k$ ⊗).

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_i |(Tx)(i)|^2 = \sum_i \left| \sum_k a_{ik} x(k) \right|^2 \overset{C-S}{\leq} \sum \left(\sum_k |a_{ik}|^2 \underbrace{\sum_k |x(k)|^2}_{\|x\|_2^2} \right) = \left(\sum_i \sum_k |a_{ik}|^2 \right) \|x\|_2^2$$

Οπότε T είναι φραγμένος κ' $\|T\|^2 \leq \sum_{i,k} |a_{ik}|^2$.
Η ανισότητα είναι γνήσια σχεδόν πάντα. πχ.

αν $a_{ik} = \begin{cases} b_k, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ τότε, όπως έχουμε δει, $\|T\| = \sup_k |b_k| = \sup_k |a_{kk}| << \left(\sum_k |a_{kk}|^2 \right)^{1/2}$

$\perp$

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε
$M_f^0 : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \mapsto fg$ (κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$,
ο M_f^0 επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα)
[Αλλιώς, με μέτρο: πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ κ' όρισε $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά
ορισμένος κ' $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ)]

$M_f^\circ(g) = fg$, $g \in C([a,b])$

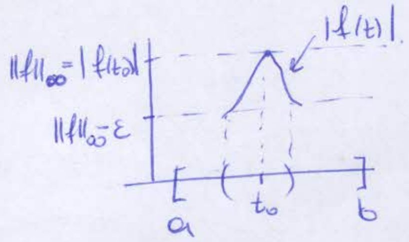
$$\|M_f^\circ(g)\|_2^2 = \int_a^b |f(x)g(x)|^2 dx \le \sup|f|^2 \int_a^b |g(x)|^2 dx \Rightarrow \|M_f^\circ(g)\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$$

Άρα, ο M_f° είναι $\|\cdot\|_2$-$\|\cdot\|_2$ συνεχής (δηλ. φραγμένος), οπότε επεκτείνεται μοναδικά σε $M_f: L^2 \to L^2$ με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$.

Ισχυρισμός: $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Απόδειξη: f συνεχής: $\exists t_0 \in [a,b] : |f(t_0)| = \|f\|_\infty$ (συνεχής στο κλειστό ⇒ έχει min κ' max)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists J \subseteq [a,b]$ γύρω από το t_0 ώστε $\forall t \in J\ |f(t)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$.



$M_f(g) = fg$, $\|M_f(g)\|_2^2 = \int |fg|^2$. Θέτουμε $g = \chi_J$ (δεν είναι συνεχής, είναι όμως R-ολοκληρώσιμη)

$$\|M_f(g)\|_2^2 = \int |f\chi_J|^2 = \int_J |f|^2 \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 m(J) = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 \int |\chi_J|^2 .$$

$\|f\|_\infty \|\chi_J\|_2 \ge \|M_f(\chi_J)\|_2 \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\|\chi_J\|$ Άρα $\|M_f\| = \|f\|_\infty$, διότι

$\|M_f\| = \sup\left\{ \frac{\|M_f(g)\|_2}{\|g\|_2} : \forall g \in\ , \ne 0 \right\} \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ ή αναλυτικά:

$$\|f\|_\infty \|\chi_J\|_2 \underset{\text{δείξαμε πριν}}{\ge} \|M_f\| \|\chi_J\|_2 \underset{\text{ορισμός } \|M_f\|}{\ge} \|M_f(\chi_J)\|_2 \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\|\chi_J\|_2 \xrightarrow[\|\chi_J\|_2 \ne 0]{\text{αφού}}$$

$\Rightarrow \|f\|_\infty \ge \|M_f\| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$ κ' αφού το ε τυχόν ∎

• Τελεστές Μετατόπισης στον $\ell^2(\mathbb{Z})$: $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$

Ορίζουμε U: $Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$ δηλ. $(Ux)(n) = x(n-1)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Προφανώς, $U: \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία κ' επί.

Ορίζουμε U^*: $x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$, $U^*x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$

α] Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$: $Ue_n = e_{n+1}$ ⇝ μετατόπιση δεξιά

κ' $U^*e_n = e_{n-1}$ ⇝ μετατόπιση αριστερά ($n \in \mathbb{Z}$)

Επεκτείνουμε γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρούμε ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

β] Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$: $\quad Se_n = e_{n+1}$ ⇝ μετατόπιση δεξιά $(n \in \mathbb{Z}_+)$

κ' $S^* e_n = \begin{cases} e_{n-1} & , n \geq 1 \\ 0 & , n = 0 \end{cases}$ ⇝ μετατόπιση αριστερά.

Επεκτείνοντε γραμμικά στον $C_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρούμε ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχείς δηλαδή $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2 \ \forall x \in C_{00}(\mathbb{Z}_+)$, άρα επεκτείνονται σε συνεχείς $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Μάλιστα, ο S είναι ισομετρία. Ο S^*; → Δεν είναι ισομετρία γιατί ΔΕΝ είναι 1-1. (ενώ είναι επί)

↳ αλλά ΔΕΝ είναι επί.

Γ Θέλουμε να ορίσουμε $S: \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

1. Θέτουμε $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ κ' $S^* e_n = \begin{cases} e_{n-1} & , n \geq 1 \\ 0 & , n = 0 \end{cases}$

2. Επεκτείνουμε γραμμικά στον $C_{00}(\mathbb{Z}_+)$.

Αν $x = \sum_{k=0}^{n} x(k) e_k = (x(0), x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots)$,

$Sx = \sum_{k=0}^{n} x(k) S e_k = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, e_{k+1} = (0, x(0), 0, \dots) + (0, 0, x(1), 0, \dots) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x(n), 0, \dots) =$

$= (0, x(0), x(1), \dots, \underbrace{x(n)}^{n+1 \text{ θέση}}, 0, \dots)$

\# $\|Sx\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} |x(k)|^2 = \|x\|_2^2$

$S^* x = \sum_{k=0}^{n} x(k) S^* e_k = \overset{k=0}{0} + \sum_{k=1}^{n} x(k)\, e_{k-1} = (\overset{0 \text{ θέση}}{x(1)}, \overset{1\text{-θέση}}{x(2)}, x(3), \dots, \overset{n-1 \text{ θέση}}{x(n)}, 0, 0, \dots)$

$\|S^* x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |x(k)|^2 = \|x\|_2^2$. Άρα, S^* συστολή: $\|S^*\| \leq 1$.

γ] Στον $L^2(\mathbb{R})$: Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζουμε $f_t : s \mapsto f_t(s) = f(s-t)$. Τότε, $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ κ' η απεικόνιση $\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \mapsto f_t$ είναι (γραμμική) ισομετρία επί. (γιατί;) Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

Γ $t \in \mathbb{R}$ ⇝ βήμα

Απάντηση στο γιατί: Ορίζουμε πρώτα $\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ με

$(\lambda_t f)(s) = f(s-t)$, $s \in \mathbb{R}$. $\|\lambda_t f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda_t f(s)|^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s-t)|^2 ds =$ (μηδενίζεται η f έξω από κάποιο $[-k,k]$)

↳ R-ολοκλ. αφού f συνεχής με συμπαγή φορέα

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $(u = s-t)$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du = \|f\|_2^2$. λ_t είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρία.

∼ ως εδώ η απάντηση ∼

Επίσης, $\lambda_t(C_c(\mathbb{R})) = C_c(\mathbb{R})$. Οπότε η λ_t επεκτείνεται σε ισομετρία $\tilde{\lambda}_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ που είναι επί, διότι $\tilde{\lambda}_t(L^2(\mathbb{R})) \supseteq \tilde{\lambda}_t(C_c(\mathbb{R})) = \lambda_t(C_c(\mathbb{R})) \Rightarrow L^2(\mathbb{R}) \supseteq \underbrace{\tilde{\lambda}_t(L^2(\mathbb{R}))}_{\text{κλειστός}} \supseteq \underbrace{C_c(\mathbb{R})}_{\text{πυκνός}}$

Αφού $\tilde{\lambda}_t(L^2(\mathbb{R}))$ κλειστός κ' περιέχει πυκνό, έπεται ότι $L^2(\mathbb{R}) = \tilde{\lambda}_t(L^2(\mathbb{R}))$. ↳ αφού ισομετρία

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: Δράση της $\mathbb{R}$ πάνω στον $\mathbb{R}$:

$$t \mapsto \varphi_t \qquad \begin{matrix} \mathbb{R} & s \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{R} & s+t \end{matrix}$$

Γενικότερα, αν X = πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος & μια δράση της $\mathbb{R}$ στον X (συμβ: $\mathbb{R} \curvearrowright X$), $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_t : X \to X$ καλή: ομοιομορφισμός (μπορεί αμφιδιαφόριση)

οπότε ορίζουμε $a_t : C_c(X) \to C_c(X)$, $f \mapsto a_t f$, όπου $(a_t f)(s) = f(\varphi_t^{-1}(s))$ (πριν είχαμε $\varphi_t^{-1}(s) = s-t$)

πχ. $X = \mathbb{R}^d$ καλά ορισμένη, γραμμική & επί.

$t \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. $\|a_t(f)\|_2^2 = \int_X |a_t(f)(s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}^d} |(f \circ \varphi_t^{-1})(s)|^2 ds$ να θέσου-

με $\varphi_t^{-1}(s) = u$, $\overset{???}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|^2 J_{\varphi_t^{-1}}(u)\, du \overset{???}{\leq} M_{J_{\varphi_t^{-1}}} \underbrace{\int |f(u)|^2 du}_{\|f\|_2^2}$

↳ πολύ καλή

↓ σταθερά που εξαρτάται απ' την Ιακωβιανή

τέλος ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ

$\perp$

• Στον χώρο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ των απειροδιάστατα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα (πχ. $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)$ όταν $|x| \leq 1$ & $f(x) = 0$ όταν $|x| > 1$) ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ του $L^2(\mathbb{R})$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2(\mathbb{R})$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$ $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Φραγμένοι Τελεστές → ΣΠΑΝΙΟ ΠΡΑΓΜΑ

πχ. παίρνουμε απ' το χώρο $C_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Παράδ. $f(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right), & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ απειροδιάστατα παραγωγίσιμες με συμπαγή φορέα

Ορίζουμε $D : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to C_c^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ γραμμική απεικόνιση.

Εξετάζουμε αν $D : (C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to (C_c^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ είναι συνεχής.

$\exists ?\, M < +\infty : \forall f \in C_c^\infty \ \|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$. ΟΧΙ πχ $f_n(t) = t^n \cdot \chi_{[0,1]}(t)$ Sorry! Δεν είναι η χ C^∞

$\|f\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$. $\|Df_n\|_2^2 = \int_0^1 |nt^{n-1}|^2 dt = n^2 \int_0^1 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1}$

↳ sorry! χ κ Df_n (τι μπορούμε να κάνουμε)