"ΣΥΜΒΑΣΕΙΣ"

- Συνήθως με μαύρο είναι η θεωρία (προτάσεις - ορισμοί) κ' κάποια πράγματα που θέλουν προσοχή (πχ. ερωτήσεις).
- Το σύμβολο "#" σημαίνει: παρατήρηση.
- Με μολύβι είναι δικές μου προσθήκες.
- Ό,τι γράφουμε στον πίνακα είναι μέσα σε Γ
  κείμενο
  ┘

Δηλ πριν το "Γ" κ' μετά το "┘" είναι αντιγραφή οι διαφάνειες.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

• Το σύνολο $\mathbb{C}:=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$ γίνεται σώμα αν εφοδιασθεί με τις πράξεις $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$, $(x,y)\cdot(u,v)=(xy-yv,xu+yv)$.
Γράφουμε $i=(0,1)$, οπότε κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται μοναδικά $z=x+yi$ όπου $x,y\in\mathbb{R}$ & οι πράξεις προκύπτουν από την παρατήρηση ότι $i^2=(-1,0)=-1+i0=-1$. Ο μιγαδικός συζυγής $\bar{z}$ του $z=x+yi$ είναι ο $\bar{z}=x-yi$ οπότε το πραγματικό μέρος του $z=x+yi$ είναι $x=\frac{z+\bar{z}}{2}:=\mathrm{Re}\,z$ & το φανταστικό του μέρος είναι $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}:=\mathrm{Im}\,z$. Το μέτρο ενός $z=x+yi\in\mathbb{C}$ είναι ο μη αρνητικός αριθμός $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$.
Κάθε μιγαδικός αριθμός z μέτρου 1 είναι της μορφής $z=e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$
Κάθε μιγαδικός αριθμός $z\neq 0$ γράφεται στην πολική μορφή $z=e^{i\theta}|z|$ όπου $e^{i\theta}=\frac{z}{|z|}$. Επομένως, $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ & αν $w=e^{i\phi}|w|$, έχουμε $zw=e^{i(\theta+\phi)}|z||w|$. (# $e^{i\theta}:=\cos\theta+i\sin\theta$)

Παραδείγματα Τελεστών:

1. $T: f\to a_1f+a_2f'+a_3f''$ διαφορικός τελεστής με a_i "καλές" συναρτήσεις.
Ορίζεται στον χώρο $C_2(\Omega)$.
Ορίζεται η $T(f)$ όταν η f δεν παραγωγίζεται;
Αρκεί να παραγωγίζεται με την «ασθενή έννοια».
Έστω f,g ∞-παραγωγίσιμες, με συμπαγή φορέα. Τότε,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} fg' = [fg]_{-\infty}^{+\infty}-\int f'g=-\int f'g, \text{ οπότε } \int f'g=-\int fg'.$$
Άρα, ορίζουμε την ασθενή παράγωγο της f μια $h=h_f$ που ικανοποιεί την
$$\int hg=-\int fg', \ \forall g \ \infty\text{-παρ/μη ("καλή")}.$$
Τώρα ο T μπορεί να οριστεί σε «μεγαλύτερο» χώρο.

2. $T:\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\longrightarrow[a_{i,j}]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, $x_i\in\mathbb{C}$, $[a_{i,j}]\in M_n(\mathbb{C})$

3. $T: f\to (Tf)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)\,dy$ ολοκληρωτικός τελεστής με g "καλή" συνάρτηση, 2π-περιοδική.

\# Αν $f_n(x)=e^{inx}$, βρίσκουμε $Tf_n=\hat{g}(n)f_n$, $n\in\mathbb{Z}$ δηλαδή,

$$T: \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ο T διαγωνοποιήθηκε! ως προς την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί είναι ορθοκανονικά. Άρα είναι βάση του χώρου που παράγουν. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση.

- Ένα $X \neq \phi$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y+z) = (x+y) + z$
3. $\exists\, \vec{0} \in X : \forall x \in X,\ \vec{0} + x = x$
4. $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X : x + (-x) = \vec{0}$

(II) Αξιώματα του πολλαπλ.: $\forall x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

1. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
2. $1 \cdot x = x$
3. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

Παραδείγματα γραμμικών χώρων:

1. $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots, \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$

Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ αποτελείται από όλες τις n-άδες μιγαδικών αριθμών, $\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ με πράξεις κατά συντεταγμένη. Μπορούμε να γράφουμε τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ και ως διανύσματα-στήλες ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T \qquad (T \text{ σημαίνει εδώ «ανάστροφος»})$$

2. $C_{00} = C_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C}$ τ.ω. $\exists\, n_x \in \mathbb{N}$ με $x(n) = 0\ \forall n > n_x\}$ με πράξεις κατά συντεταγμένη.

Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς.

Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει του c_{00}: κάθε $x=(x(n))\in c_{00}$ γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός $x=\sum_{n=1}^{n_x} x(n)e_n$. Δηλαδή η $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}. Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας $\operatorname{supp}x := \{n\in\mathbb{N} : x(n)\neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1,2,\dots,n_x\}$).

Γ $x\in c_{00}$ δηλ $x=(x(1),x(2),\dots,x(n_x),0,0,\dots)$ τελικά μηδέν.

Δηλ αν ονομάσω $e_n=(0,0,\dots,0,\underset{\text{n-θέση}}{1},0,0,\dots)\in c_{00}$, τότε $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι γρ. ανεξ. διότι $\sum_{k=1}^{N}\lambda_k e_k=0 \iff (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N,0,0,\dots)=0 \iff \lambda_k=0\ \forall k=1,\dots,N$.

$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k$ ΔΕΝ είναι γραμμ. συνδυασμός! Είναι όριο γραμμ. συνδυασμού, δηλ $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k e_k$.

$c_{00}\ni x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ με πεπ/νο φορέα, δηλ $\exists n_x\in\mathbb{N} : x(n)=0\ \forall n>n_x$, οπότε ο φορέας $\operatorname{supp}x\subseteq\{1,2,\dots,n_x\}$. ⌋

3. Το σύνολο $\mathcal{S}$ όλων των ακολουθιών πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση κ πολλαπλ. κατά συντεταγμένη: $x+y=(\xi(k)+\eta(k))$, $\lambda x := (\lambda\xi(k))$ για $x=(\xi(k))$, $y=(\eta(k))$ κ $\lambda\in\mathbb{K}$.

4. Αν $A\neq\emptyset$ κ $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{K}$ τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση κ πολλαπλ. κατά σημείο: αν $f,g\in\mathbb{K}^A$ κ $\lambda\in\mathbb{K}$ ορίζουμε $f+g,\ \lambda f\in\mathbb{K}^A$ θέτοντας

$(f+g)(t)=f(t)+g(t)$, $(\lambda f)(t)=\lambda f(t)$, $t\in A$.

$\#\ \mathcal{S}=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

5. Ο χώρος $R[0,1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.

Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$, όπου $u(t):=\frac{1}{2}\left(f(t)+\overline{f(t)}\right)$, $v(t):=\frac{1}{2i}\left(f(t)-\overline{f(t)}\right)$ παίρνουν πραγματικές τιμές.

Η f λέγεται R-ολοκληρώσιμη $\overset{(\iff)}{\text{όταν}}$ οι u κ v είναι R-ολοκληρώσιμες κ τότε ορίζουμε $\int f(t)\,dt := \int u(t)\,dt + i\int v(t)\,dt$.

Ο $R[0,1]$ είναι γραμμικός χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

Θεώρημα (Απειρ. II): $\forall x,y \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1]) \Rightarrow x+y \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$ & $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\lambda x \in \mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1])$
όπου $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}([0,1]) := \{x : [0,1]\to\mathbb{R}$ R-ολ/μες$\}$.

Το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση: $\int(\lambda x+y) = \lambda\int x + \int y$.

Έστω $x : [0,1]\to\mathbb{C}$. Η x γράφεται ! $x = u+iv$ με $u = \mathrm{Re}\,x = \frac{x+\bar{x}}{2}$, $v = \mathrm{Im}\,x = \frac{x-\bar{x}}{2i}$

• $\left|\int x(t)dt\right| \leq \int |x(t)|dt$ $\forall x:[0,1]\to\mathbb{C}$ R-ολ/μη.

6. Ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών (= συναρτήσεις $x: \mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$. Είναι γραμμικός χώρος με πράξεις κατά συντεταγμένη.

• Αν X γραμμικός χώρος & $x\in X$, $A\subseteq X$, λέμε ότι το x ανήκει στη γραμμική θήκη του A (γράφουμε $x\in \mathrm{span}(A)$) ή ότι είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A, αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1,\dots,x_n \in A$ & $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε $x = \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n$.

Τα διανύσματα $y_1,\dots,y_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν κάποιο απ' αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ αν υπάρχουν $\mu_1,\dots,\mu_m \in \mathbb{K}$, όχι όλα 0 ώστε $\mu_1y_1+\mu_2y_2+\dots+\mu_my_m = \vec{0}$.

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k, δηλαδή αν $\lambda_1y_1+\dots+\lambda_my_m = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_m=0$.

Ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν περιέχει κάποια $y_1,\dots,y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x\in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M\setminus\{x\}$, δηλ ανήκει στη γραμμική θήκη του $M\setminus\{x\}$.

Το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $x_1,\dots,x_n$ του M ισχύει η συνεπαγωγή
$\lambda_1x_1+\dots+\lambda_mx_m = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_m=0$.

Ένα $Y\subseteq X$ λέγεται (γραμμικός) υπόχωρος του X αν $\mathrm{span}(Y)\subseteq Y$, δηλ αν $x,y\in Y$ & $\lambda\in\mathbb{K} \Rightarrow x+\lambda y\in Y$.

Έστω E, F πραγματικοί ή μιγαδικοί γραμμικοί (: διανυσματικοί) χώροι.
Μια απεικόνιση $T: E \to F$ λέγεται γραμμική αν $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) . \quad (\in F)$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν ΕΠΙΠΛΕΟΝ είναι 1-1 κ' επί.
Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T: E \mapsto F$.

Κάθε γραμμικός χώρος «είναι» ένας χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.
↳ ισομορφικός με.

ΔηΛ $\forall E$ γρ. χώρο $\exists$ σύνολο X (κατάλληλο μοναδικό) κ' μια 1-1 γραμμ. απεικόνιση $E \xrightarrow{T} \mathbb{C}^X$, όπου $\mathbb{C}^X := \{f: X \to \mathbb{C}$ όλες$\}$.

Πχ. αν $\dim E < \infty$ (δηλ. $\exists$ γραμμ. ανεξ. σύνολο πεπερασμένο $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ που $\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_N\} = E$) τότε E ισόμορφος με $\mathbb{C}^X$, $X = \{1, 2, \dots, N\}$.

Πχ. $c_{00} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
↳ εκείνες οι $x: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ που έχουν πεπερασμένο φορέα.

*Ενδιαφέρουσα Τετράδιο Άσκηση: $\forall$ μιγαδικό γραμμικό χώρο E, $\exists$ σύνολο X ώστε ο E να είναι γραμμικά ισόμορφος με έναν υπόχωρο του $\mathbb{C}^X$.

$$\ell^2 = \{x: \mathbb{N} \to \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty\} \iff \exists \|x\|_2^2 \in \mathbb{R} : \forall N \in \mathbb{N} \ \sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2 \le \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2$$

Γνωρίζουμε από Πραγματική: Αν ονομάσουμε $d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - y(k)|^2\right)^{1/2}$, τότε το $d(x,y)$ ορίζεται κ' είναι μετρική στον ℓ^2 (ως προς την οποία, ο ℓ^2 είναι ΠΛΗΡΗΣ μετρικός χώρος).

$x, y \in \ell^2$ ν.δ.ο. $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)+y(k)|^2 < +\infty \rightsquigarrow |x(k)+y(k)|^2 \le 2|x(k)|^2 + 2|y(k)|^2$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)+y(k)|^2 \le 2 \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2 < \infty$$

Άρα $x+y \in \ell^2$

$f \in R([0,1]) \overset{\text{Ναι}}{\Rightarrow} |f|^2 \in R([0,1])$, οπότε μπορούμε να εφοδιάσουμε τον $R([0,1])$ με την μετρική $d_2(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$.

Όμως, ο $(R([0,1]), d_2)$ ΔΕΝ είναι πλήρης (άσκηση).

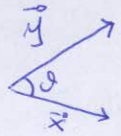
Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος. Ένα εσωτερικό γινόμενο στον E είναι μια απεικόνιση $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε:

1. $\langle x_1 + \lambda x_2 , y \rangle = \langle x_1 , y \rangle + \lambda \langle x_2 , y \rangle$
2. $\overline{\langle x , y \rangle} = \langle y , x \rangle$
3. $\langle x , x \rangle \geq 0$
4. $\langle x , x \rangle = 0 \iff x = 0$.

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Άρα, 1'. $\langle x , y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x , y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x , y_2 \rangle$.

πχ. $\mathbb{R}^3$



$\langle \vec{x} , \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos\theta(x,y)$

$\langle \vec{x} , \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|_2^2$ διγραμμική

$\langle \vec{x} , \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$\mathbb{R}^n$: $\langle x , y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ διγραμμική [δηλ. στον $\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι: 1. $\langle x_1 + \lambda x_2 , y \rangle = \langle x_1 , y \rangle + \lambda \langle x_2 , y \rangle$ και 1'. $\langle x , y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x , y_1 \rangle + \lambda \langle x , y_2 \rangle$]

και $\langle x , x \rangle = \|x\|_2^2$

$\mathbb{C}^n$: ο ίδιος ορισμός ΔΕΝ δίνει $\langle x , x \rangle = \|x\|_2^2$.

Μάλιστα, $\langle x , x \rangle \in$ κατ' ανάγκη στο $\mathbb{R}$.

πχ για $n = 1$, $i \cdot i = -1$, ενώ ξέρουμε ότι $\|i\|_2^2 = 1$

ΜΠΑΛΩΜΑ: στο $\mathbb{C}$, $\langle z , w \rangle = z \bar{w}$ οπότε $\langle z , z \rangle = |z|^2$

στο $\mathbb{C}^n$, $\langle z , w \rangle = \sum_{k=1}^{N} z_k \bar{w}_k$

κέρδος $\to$ $\langle z , z \rangle = \|z\|_2^2$

"Δυσκολία" $\to$ ΟΧΙ διγραμμική

- $z \mapsto \langle z , w \rangle$ γραμμική $\forall w$
- $w \mapsto \langle z , w \rangle$ αντιγραμμική (αλλιώς: συζυγώς γραμμική)

Δηλ. $\langle z_1 + \lambda z_2 , w \rangle = \langle z_1 , w \rangle + \lambda \langle z_2 , w \rangle \quad \forall z_1, z_2, w \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

$\langle z , w_1 + \lambda w_2 \rangle = \langle z , w_1 \rangle + \langle z , \lambda w_2 \rangle = \langle z , w_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle z , w_2 \rangle \quad \forall z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$\langle z , w \rangle = \sum z_k \bar{w}_k \rightsquigarrow \langle z , \lambda w \rangle = \sum z_k (\overline{\lambda w_k}) = \bar{\lambda} \sum z_k \bar{w}_k$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

1. $\forall x,y \in E$ ισχύει $|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$.

2. Ισότητα ισχύει ανν τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle x,x\rangle + \langle x,\lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle =$$

$$= \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\overline{\langle x,y\rangle} + |\lambda|^2\langle y,y\rangle.$$

Ειδικότερα, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\langle y,y\rangle\lambda^2 + (2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)\lambda + \langle x,x\rangle \geq 0$ # $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$$\Rightarrow \Delta = (\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0 \Rightarrow (\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \quad ⊛$$

Ζητάμε $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$. Τώρα, αν

$z = \langle x,y\rangle = |z|e^{i\theta} \Leftrightarrow |z| = e^{-i\theta}\langle x,y\rangle = \langle x, e^{i\theta}y\rangle$ άρα $\overset{|z|}{\overset{\parallel}{|\langle x,y\rangle|}} = \langle x, e^{i\theta}y\rangle$

$$⊛ \quad \left.\begin{aligned} &(\mathrm{Re}\langle x,y\rangle)^2 = (\mathrm{Re}\langle x, e^{i\theta}y\rangle)^2 \leq \langle x,x\rangle\langle e^{i\theta}y, e^{i\theta}y\rangle \\ &\text{και } (\mathrm{Re}\langle x, e^{i\theta}y\rangle)^2 = (\langle x, e^{i\theta}y\rangle)^2 = |\langle x,y\rangle|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

↳ γιατί $\langle x, e^{i\theta}y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ πραγματικός αριθμός.

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle e^{i\theta}y, e^{i\theta}y\rangle = \langle x,x\rangle e^{i\theta}e^{-i\theta}\langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

Άσκηση: Αν E είναι ένας γραμμικός χώρος, τότε $\exists X \neq \emptyset$ σύνολο και $T: E \to \mathbb{C}^X = \{$όλες οι $f: X \to \mathbb{C}\}$ γραμμική και 1-1.

$\Longleftrightarrow$ Κάθε γραμμικός χώρος είναι (γραμμικά) ισόμορφος με ένα υπόχωρο κάποιου $\mathbb{C}^X$.

Μπορώ συνήθως να βρίσκω πολλά X.

Π.χ. E = τριγωνομετρικά πολυώνυμα βαθμού ≤ 4

$E \subseteq \mathbb{C}^n$ για κάποιο n (πόσο;) $\rightsquigarrow X = \{1,2,3,\dots,n\}$

$E \subseteq C([0,2\pi])$ $\rightsquigarrow X = [0,2\pi]$

Παραδείγματα εσωτερικών γινομένων.

1. $\mathbb{C}$: $\langle z,w\rangle = z\bar{w}$ ή $\langle z,w\rangle = 18z\bar{w}$

2. $\mathbb{C}^n$: $\langle z,w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z(k)\overline{w(k)}$, $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}}_{n}$

3. $R([0,1])$: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ ώστε $\langle f,f\rangle = \int |f(t)|^2 dt \geq 0$.

ΔΕΝ είναι εσωτερικό γινόμενο γιατί $\langle f,f\rangle = 0 \not\Rightarrow f=0$

Είναι ημιεσωτερικό γινόμενο.

\# Κάθε $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται ! $f(t) = (\mathrm{Re}f)(t) + i(\mathrm{Im}f)(t)$, όπου

$\mathrm{Re}f = \frac{f+\bar f}{2}$, $\mathrm{Im}f = \frac{f-\bar f}{2i}$: $[0,1]\to\mathbb{R}$

Ορίζουμε $\int_0^1 f(t)dt := \int_0^1 (\mathrm{Re}f)(t)dt + i\int_0^1 (\mathrm{Im}f)(t)dt$ είναι μιγαδικός αριθμός.

Μπορεί μια $f\in R[0,1]$, $f\neq 0$ να έχει $\int |f|^2 = 0$.

πχ. $f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq \frac{1}{2} \\ 3i & , t = \frac{1}{2}\end{cases}$

Άρα το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ΟΧΙ εσωτερικό γινόμενο στον $R[0,1]$.

ΟΜΩΣ, αν περιοριστώ στον υπόχωρο $C([0,1]) \subseteq R([0,1])$ (βλ.), τότε το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στον $C([0,1])$ γίνεται εσωτερικό γινόμενο, διότι αν $f\in C([0,1])$ &

$\int |f(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow$ αναγκαστικά $f(t)=0$ $\forall t\in[0,1]$. ⊣

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο η απεικόνιση $\|\cdot\|: E\to\mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E, δηλαδή ικανοποιεί, $\forall x,y\in E$ & $\lambda\in\mathbb{K}$,

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
3. $\|x\| = 0 \iff x=0$. (& $\|x\|\geq 0$)

Γ Αποδ.

3. Προφανές από τη τελευταία ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου.

2. $\|\lambda x\|^2 = \langle\lambda x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,\lambda x\rangle = \lambda\overline{\langle\lambda x,x\rangle} = \lambda(\overline{\lambda\langle x,x\rangle}) = \lambda\bar\lambda\langle x,x\rangle = |\lambda|^2\|x\|^2$

1. $\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + |\langle x,y\rangle| + |\langle y,x\rangle| + \langle y,y\rangle$

$\overset{C-S}{\leq} \|x\|^2 + \|x\|\|y\| + \|y\|\|x\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$.

Άρα αν ορίσουμε $d(x,y) = \|x-y\|$, τότε (E,d) γίνεται μετρικός χώρος.

Συμβ. $\|\cdot\| \rightsquigarrow$ η μετρική d.

Οι γραμμικές πράξεις είναι συνεχείς.

→ $(E,\|\cdot\|)\times(E,\|\cdot\|)\to(E,\|\cdot\|)$

$$(x,y)\xmapsto[\text{συνεχής}]{} x+y$$

Αποδ. Αν $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y \Rightarrow \|(x_n+y_n)-(x+y)\| = \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \le \|x_n-x\| + \|y_n-y\| \to 0$

→ $(\mathbb{C},|\cdot|)\times(E,\|\cdot\|)\to(E,\|\cdot\|)$

$$(\lambda,x)\xrightarrow[\text{συνεχής}]{}\lambda x$$

Αποδ. όπως στον απειροστικό.

Επίσης, $(E,\|\cdot\|)\times(E,\|\cdot\|)\to(\mathbb{C},|\cdot|)$

$$(x,y)\xmapsto[\text{συνεχής}]{}\langle x,y\rangle$$

Αποδ. $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$ κ' $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$

Ισχυρισμός: $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$

διότι $|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| = |\langle x_n-x,y_n\rangle+\langle x,y_n-y\rangle| \le |\langle x_n-x,y_n\rangle|+|\langle x,y_n-y\rangle|$

$$\underset{C-S}{\le}\|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\| \longrightarrow 0\cdot\underbrace{\|y_n\|}+\|x\|\cdot 0=0 \quad \dashv$$

↳ συγκλίνουσα => φραγμένη

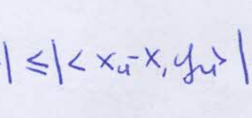
· Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση:

$(E,\|\cdot\|)\times(E,\|\cdot\|)\to(\mathbb{K},|\cdot|)$: $(x,y)\to\langle x,y\rangle$ είναι συνεχής.

· Κανόνας Παραλληλογράμμου (#): Για κάθε $x,y\in E$,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Αποδ. (τετριμμένη)



$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2$

$\|x-y\|^2=\|x\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\|y\|^2$

Πρόσθεση κατά μέλη κ' τέλος. ⊣

· (Πόρισμα) Πυθαγόρειο Θεώρημα: Αν $x,y\in E$ κ' $\langle x,y\rangle=0$, τότε

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

⌜ $4\langle x,y\rangle = \underbrace{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+yi\|^2 - i\|x-iy\|^2}_{\text{Πιθανό σπαστό}} = \sum_{k=0}^{3} i^k \|x+i^k y\|^2$. ⊛

Οποιαδήποτε νόρμα, ορίζει εσωτερικό γινόμενο ⤳ ΛΑΘΟΣ!

ΑΝ $(E,\|\cdot\|)$ γραμμικός, είναι χώρος με νόρμα κ' ΑΝ η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τον κανόνα #, τότε η σχέση ⊛ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο τέτοιο ώστε $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$. ⌟

- Δύο στοιχεία x,y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται κάθετα (συμβολικά $x\perp y$), όταν $\langle x,y\rangle = 0$.

Μια οικογένεια $\{e_i : i\in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ $\forall i,j\in I$.

ορθοκανονική ⟹ γραμμικά ανεξάρτητη.

⌜
- $0\perp x$ $\forall x$
- Αν $w\in E : w\perp x$ $\forall x\in E \Rightarrow w=0$ διότι $w\perp w$, άρα $\langle w,w\rangle = 0 \Rightarrow w=0$
- Χρήσιμο: Αν $w\in E$ κ' $\exists D\subseteq E$ πυκνό ως προς $\|\cdot\|$ τ.ω $w\perp d$ $\forall d\in D$

$\Rightarrow w=0$

Αποδ.

Αφού D πυκνό, έχουμε $w\in\overline{D}$ άρα $\exists (d_n) : d_n\in D$ $\forall n$ κ' $\|d_n - w\|\to 0$

τότε όμως, $\langle d_n, w\rangle \to \langle w,w\rangle$
Αλλά $w\perp d_n \Rightarrow \langle d_n, w\rangle = 0$ $\forall n$

$\Bigg\} \Rightarrow \langle w,w\rangle = 0 \Rightarrow w=0$.

Ισχυρισμός: Αν $\mathcal{E}$ είναι ορθοκανονικό $\subseteq E \Rightarrow \mathcal{E}$ γραμμ. ανεξάρτητο.

Απόδειξη: Έστω $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ ένας πεπερ. γραμμ. συνδυασμός, όπου $x_n\in\mathcal{E}$, $\lambda_n\in\mathbb{C}$.

Πρέπει ν.δ.ο $\lambda_k = 0$ $\forall k=1,\dots,n$

Εσωτερικίζω τη σχέση με κάθε ένα από τα x_m $(m=1,2,\dots,n)$:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_m \right\rangle = \langle 0, x_m\rangle = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x_m\rangle = 0$$

$\|$ ξέρουμε ότι $\forall \langle x_k, x_m\rangle = 0$, εκτός αν $k=m$

$$\lambda_m \langle x_m, x_m\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_m = 0.$$ ⌟

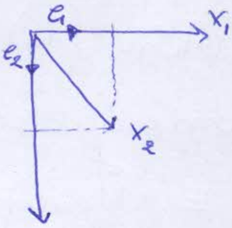
· Διαδικασία Gram-Schmidt: Αν $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' ένα χώρο $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, να ισχύει $[e_n : n=1,2,\dots,k] = [x_n : n=1,2,\dots,k]$ # Συμβ. $[A]$ ή span A η γρ. θήκη.

Gram-Schmidt: $\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq E$
$\hookrightarrow$ γρ. ανεξ ($\Rightarrow x_n \neq 0 \ \forall n$)

Ορθοκανονικοποιούμε ένα-ένα τα x_n:

$x_1 \neq 0 \Rightarrow e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$, $\{e_1\}$ ορθικό σύνολο κ' $[x_1]=[e_1]$.

$x_2 \rightsquigarrow x_2 - \langle x_2,e_1\rangle e_1 = y_2 \rightsquigarrow e_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$ οπότε $y_2 \perp e_1 \rightsquigarrow \{e_1,e_2\}$ ορθ/κο



$x_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} pr_{e_i} x_k$
$pr_b a = \dfrac{\langle a,b\rangle}{\langle b,b\rangle} b$

κ' βεβαίως $e_2 \in \text{span}\{x_1,x_2\}$

κ' $x_2 \in \text{span}\{e_1,y_2\} = \text{span}\{e_1,e_2\}$

Άρα $\text{span}\{e_1,e_2\} = \text{span}\{x_1,x_2\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: Αφού αν έχουμε φτιάξει $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ ορθικό ώστε …, τότε ορίζουμε y_{n+1} όπως πρέπει κ' $e_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$ κ' αποδεικνύουμε ότι ..

Κάθε υπόχωρος $F\subseteq E$ πεπερ. διάστασης ($\dim F<+\infty$) έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x\in F$ γράφεται!

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k\rangle e_k .$$

F γρ. υπόχωρος του E, $\dim F<+\infty$, οπότε $\exists n\in\mathbb{N}$ κ' $\exists x_1,x_2,\dots,x_n\in F$ γρ. ανεξ. με $\text{span}\{x_1,\dots,x_n\} = F \underset{\text{Gr.-S.}}{\Longrightarrow}$ βρίσκουμε: $e_1,\dots,e_n \in F$ ορθκο με $\text{span}\{e_1,\dots,e_n\}=F$

Οπότε $\forall x\in F \ \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C} : x = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k$. Εσωτερικίζουμε με e_m:

$\langle x,e_m\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle e_k,e_m\rangle}_{=\delta_{km}} = \lambda_m$. Αφού $x = \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k \underset{\perp \text{ ανά δύο}}{\overset{\Pi.\Theta.}{\Longrightarrow}}$

$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|\langle x,e_k\rangle e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2 \underbrace{\|e_k\|^2}_{=1}$ baby Parseval!

$\langle \langle x,e_1\rangle e_1, \langle x,e_2\rangle e_2\rangle = 0$
$\|$
$\langle x,e_1\rangle \overline{\langle x,e_2\rangle} \underbrace{\langle e_1,e_2\rangle}_{\perp}$
$\Downarrow$ ΠΘ
$\|\langle x,e_1\rangle e_1 + \langle x,e_2\rangle e_2\|^2 = \|\langle x,e_1\rangle e_1\|^2 + \|\langle x,e_2\rangle e_2\|^2$
$= |\langle x,e_1\rangle|^2 + |\langle x,e_2\rangle|^2 \quad (\|e_i\|^2=1)$

Αν f είναι τριγ/κο πολυώνυμο, τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n}|\hat{f}(k)|^2$$

όπου $\hat{f}(k) = \langle f,e_k\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

Λήμμα: Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x\in E$ κ' $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ πεπ/νη ορθική ακολουθία στον E. α) Το διάνυσμα $y_x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υπόχωρου $F=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}$.

β) Επιπλέον, το $x-y_x$ είναι κάθετο στον F κ' αντίστροφα, αν $y\in F$ κ' $x-y\perp F$, τότε $y=y_x$.

Δηλαδή, η απεικόνιση $\mathbb{K}^n\to\mathbb{R}^+ : (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\to\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\|$ έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x,e_1\rangle,\langle x,e_2\rangle,\dots,\langle x,e_n\rangle)$.

Απόδειξη: (β) Κάθε $y\in F$ γράφεται $y=\sum_{k=1}^{n}\langle y,e_k\rangle e_k$.

Τώρα: $(x-y)\perp F \iff \langle x-y,e_k\rangle=0\ \forall k \iff \langle y,e_k\rangle=\langle x,e_k\rangle\ \forall k \iff y=y_x$.

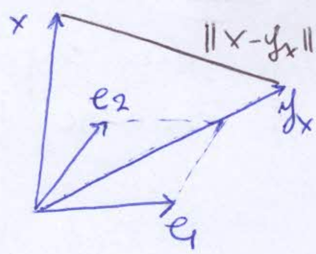
Αν $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k=\left(x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}(\langle x,e_k\rangle-\lambda_k)e_k\right)=z+y_1$

Παρατηρούμε ότι $z\perp F$ (γιατί $\langle z,e_k\rangle=0$ για $k=1,\dots,n$) κ' $y_1\in F$, άρα $y_1\perp z$. Πυθαγόρειο: $\|z+y_1\|^2=\|z\|^2+\|y_1\|^2$ δηλαδή:

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^{n}(\langle x,e_k\rangle-\lambda_k)e_k\right\|^2=$$

$$=\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle-\lambda_k|^2 \quad (1).$$

αυτό έχει minimum για $\lambda_k=\langle x,e_k\rangle\ \forall k$



$\|x-y_x\|=\operatorname{dist}(x,[e_1,e_2])$

$y_x=\langle x,e_1\rangle e_1+\langle x,e_2\rangle e_2$

$y_x\in[e_1,e_2]$.

#Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο κ' $\{e_1,e_2,\dots\}$ ορθική ακολουθία.

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2\quad\forall x\in E,\ n\in\mathbb{N}.$$

Προκύπτει από την (1) με $\lambda_k=0$.

Ανισότητα Bessel: $\sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2\le\|x\|^2$

Η ισότητα ισχύει ανν $x\in[e_i : i=1,2,\dots,n]$

• Γενικευμένη Ανισότητα Bessel: $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2\le\|x\|^2$.

Bessel: $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθ/κή, $x \in E$ τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Αποδ. $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 \geq 0$ ∎

$\Rightarrow \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ ~ Γενικευμένη Bessel

Ισχύει η ισότητα; (Πότε;)

$\text{span}\{e_1, e_2, \dots\} = F$ γρ. υπόχωρος του E

$x \in E$: ΠΑΝΤΑ $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Για την ισότητα, αρκεί $x \in [e_1, \dots, e_n]$ για κάποιο n, δηλ $x \in F$

Αρκεί $x \in \overline{F}$. Πρέπει;

Αν $x \notin \overline{F} \Rightarrow d(x, F) = \delta > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $d^2(x, F_n) \geq \delta^2$, $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

αλλά, $d^2(x, F_n) = \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2$.

$\Rightarrow \forall n$ $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \geq \delta^2 > 0$. Δηλ. $x \notin \overline{F} \Rightarrow \sum^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \lneq \|x\|^2$

Αρνηση αντιπαρωγής: Αν $\sum^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow x \in \overline{F}$

\# Αν έχουμε μια οποιαδήποτε ορθοκανονική οικογένεια $\{e_t : t \in T\}$ σ'ένα χώρο μ' εσωτερικό γινόμενο, τότε $\forall x \in E$ $T_x := \{t \in T : \langle x, e_t \rangle \neq 0\}$ αριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $T_n = \{t \in T : |\langle x, e_t\rangle|^2 > \frac{\|x\|^2}{n}\}$,

οπότε $T_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Όμως, παρατηρούμε ότι κάθε T_n είναι πεπερασμένο διότι αν κάποιο T_n άπειρο $\Rightarrow$

$\|x\|^2 \underset{\text{Bessel}}{\geq} \sum_{t \in T_n} |\langle x, e_t \rangle|^2 \geq \frac{\|x\|^2}{n} (\underbrace{\# T_n}_{\text{πληθάριθμος}}) = \frac{\|x\|^2}{n} \cdot \infty$ $\Rightarrow \# T_n \leq n$

Οπότε, $T_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}$ πεπερ = αριθμήσιμο.

better: $\|x\|^2 \underset{\text{Bessel}}{\geq} \sum |\langle x, e_t\rangle|^2 \geq \sum \frac{\|x\|^2}{n} = \|x\|^2 \sum \frac{1}{n} = \|x\|^2 \cdot \infty = \infty > \|x\|^2$

άτοπο.

Πώς σκέφτηκα το T_n; Απο το T_x έχουμε $\langle x, e_t \rangle \neq 0 \Rightarrow |\langle x, e_t \rangle| \neq 0 \Rightarrow |\langle x, e_t\rangle|^2 \neq 0$

Αν $|\langle x, e_t \rangle|^2 = 0 \Rightarrow \forall n$ $\exists t_0 \in T : \forall t \geq t_0$ $|\langle x, e_t\rangle|^2 < \frac{1}{n} < \frac{\|x\|^2}{n}$

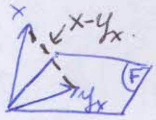
Άρα αν $|\langle x, e_t \rangle|^2 \neq 0 \Rightarrow \exists n : \forall t \in T$ $\exists t_0 \geq t$: $|\langle x, e_t\rangle|^2 \geq \frac{\|x\|^2}{n}$

Αλλιώς, Αρχιμήδεια Ιδιότητα: $\frac{|\langle x, e_t \rangle|^2}{\|x\|^2} > 0 \Rightarrow \exists n : 0 < \frac{1}{n} < \frac{|\langle x, e_t\rangle|^2}{\|x\|^2}$

Επανάληψη:

• $(E, \langle , \rangle)$ με εσωτ. γινόμενο, $x \in E$, $F \subseteq E$ γρ. υπόχωρος με $\dim F < +\infty$.

Τότε $\exists y_x \in F : \|x - y_x\| = \operatorname{dist}(x, F)$.



(Θεώρημα της σελίδας 9 κάτω)

Απόδειξη: $\delta = d(x,F) := \inf\{\|x-y\| : y \in F\}$.

$\to \forall \varepsilon > 0, \varepsilon = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in F : \|x - y_n\| < \frac{1}{n} + \delta$ ① $\longrightarrow$ (χαρακτηρισμός infimum)

$\# \ \|y_n\| \leq \|x\| + \frac{1}{n} + \delta \ \forall n$ αφού $\|y_n\| - \|x\| \leq \|x - y_n\|$

$\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ φραγμ. $\subseteq F$ κ' $\dim F < +\infty$

$\Downarrow$ B-W $\leftarrow$ επειδή

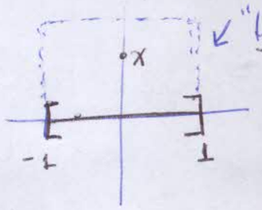
$\exists (y_{k_n})$ υπακολουθία της (y_n) που $y_{k_n} \to y_0$. | Κάθε χώρος πεπ/νης διάστασης είναι πλήρης.

Επειδή $\dim F < +\infty$, είναι κλειστός (από Πεπερασμένη) (γιατί;)

Άρα $y_0 \in F$. Οπότε $\delta \leq \|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_{k_n}\| \overset{①}{=} \delta$. Άρα, $\|x - y_0\| = \delta$

Μοναδικότητα του y_x: ΔΕΝ ισχύει πάντα σε χώρους με νόρμα $(E, \|\cdot\|)$.

πχ. $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ $F = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\} \leq E$ κ' $x = (0,1)$.

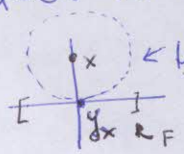


$\operatorname{dist}(x,F) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{ \|(0,1) - (t,0)\|_\infty$

Αλλά, $\|(0,1) - (t,0)\|_\infty = \|(-t, 1)\|_\infty = \max\{|-t|, 1\} \leq 1$ ανν $|t| \leq 1$.

Άρα όλα τα $y_x = (t,0)$, $|t| \leq 1$ έχουν την ίδια ελάχιστη απόσταση απ' το x.

Αν $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, F ίδιο τότε



δηλ τότε θα είχα μόνο το $(0,0)$.

Μοναδικότητα όταν $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$: Έστω $y_1, y_2 \in F$ με $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta$.

$$\|(x-y_1) + (x-y_2)\|^2 + \|(x-y_1) - (x-y_2)\|^2 \underset{(\#)}{\overset{\text{καν}}{=}} 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|2x - (y_1+y_2)\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y_1 - y_2\|^2 = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_2\|^2 - 4\underbrace{\Big\|x - \underset{\in F}{\frac{y_1+y_2}{2}}\Big\|^2}_{\geq \delta^2} \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0.$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2.$$

Αποδείξαμε την μοναδικότητα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα (#)

Τι κάνουμε όταν ο F δεν έχει πεπλ. διάσταση; (παρατήρηση της σελίδας 9 τέλος)

Γ' αντ' αυτού, αρκεί: κυρτό κ' πλήρες υποσύνολο.

Έστω F κλειστός υπόχωρος ενός E με εσωτ. γιν. & $x \in E$.

Αν. βρούμε (αν υπάρχει) $y_x \in F : \|x-y_x\| = dist(x,F) = \delta$.

Προσπάθεια: Από ορισμό infimum, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, y_n \in F : \|x-y_n\| < \delta + \frac{1}{n}$. ($\forall \varepsilon>0$, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ άρα)

όπως πριν, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ φραγμένη. ΚΑΙ ΤΙ ΕΓΙΝΕ;

Πάμε γρήγορα στα ψιλά: $n,m \in \mathbb{N}$ $x-y_n$, $x-y_m$, κανόνας #

$$\|y_n-y_m\|^2 \leq 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\underbrace{\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2}_{\geq \delta^2} \leq 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - 4\delta^2 \leq$$

$\frac{y_n+y_m}{2} \in F$ επειδή F υπόχωρος ή επειδή F κυρτό.

$$\leq 2\left(\delta+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\delta+\frac{1}{m}\right)^2 - 4\delta^2 \leq \text{"κάτι ψιλό"} \xrightarrow[n,m\to\infty]{\text{όταν}} 0.$$

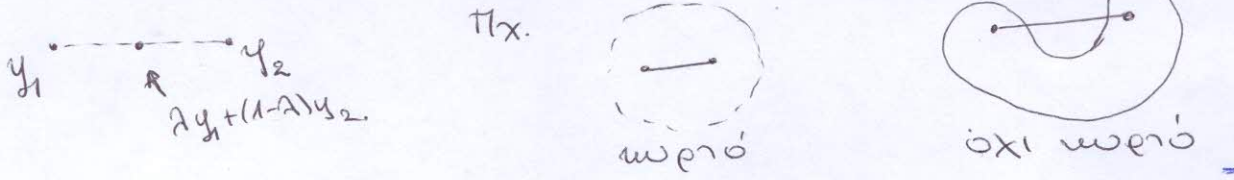
Δεν κατάφερα ν.δ. σύγκλιση, διότι ΔΕΝ συγκλίνει!

Έδειξα όμως ότι είναι βασική!

Επιβάλλουμε την επιπλέον υπόθεση ότι ο $(F, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης χώρος, οπότε η (y_n) συγκλίνει σε κάποιο $y_x \in F$. Οπότε, $\|x-y_x\| = \delta$.

Ένα $F \subseteq E$ (E $\mathbb{K}$-γρ. χώρος) λέγεται κυρτό, αν $\forall y_1, y_2 \in F$ το ευθύγραμμο τμήμα $[y_1, y_2] \subseteq F$. Δηλ. $[y_1,y_2] = \{\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$

Πχ.



• Ένας χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα:

1. Ο χώρος $\mathbb{K}^n$ με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά ΔΕΝ είναι χώρος Hilbert ως προς τη νόρμα αυτή (γιατί ΔΕΝ ικανοποιείται ο κανόνας του παρ/μου), μολονότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

2. Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert κ' ο χώρος C_{00} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρός του. Επομένως, ο χώρος $(C_{00},\|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert εφ' όσον δεν είναι πλήρης.

Γ

$\ell^2=\{x=(x(n)) : x(n)\in\mathbb{C}\ \forall n\ \sum|x(n)|^2<\infty\} \supseteq C_{00}=\{x=(x(n)) : \exists n_x\in\mathbb{N}\ x(n)=0\ \forall n>n_x\}$.

↳ γραμμικός χώρος (λόγω κάποιας ανισότητας)

Η νόρμα του προέρχεται από το εσ. γιν. $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)\overline{y(n)}$ κ' $\langle x,x\rangle=\sum|x(n)|^2=\|x\|^2$.

\# Συγκλίνει απόλυτα από C-S : $\sum|x(n)\overline{y(n)}|\leq\left(\sum|x(n)|^2\sum|\overline{y(n)}|^2\right)^{1/2}$

· Ο $(\ell^2,\|\cdot\|_2)$ είναι Πλήρης. Αποδ. Πραγματική (No need here. It's a fact!)

· $C_{00}\subseteq\ell^2$

↳ υπόχωρος του ℓ^2, μάλιστα πυκνός: $\forall x\in\ell^2, \forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in C_{00} : \|x-x_\varepsilon\|<\varepsilon$.

Απόδειξη: Τι σημαίνει $x\in\ell^2$; $\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^2<\infty$

δηλ. σημαίνει ότι $\exists n_0 : \sum_{n>n_0}|x(n)|^2<\varepsilon^2$

Ονομάζουμε $x_\varepsilon=(x(1),x(2),\dots,x(n_0),0,0,\dots)$
κ' $x-x_\varepsilon=(0,0,\dots,0,x(n_0+1),x(n_0+2),\dots)$ $\Big\}\Rightarrow \|x-x_\varepsilon\|_2^2=\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|x(k)|^2<\varepsilon^2$ ┘

3. Ο χώρος $C([a,b])$ δεν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

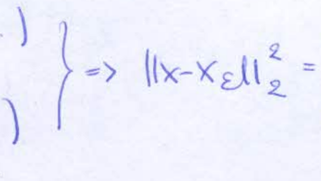
Γ $C([a,b])$, $\|f\|_2=\left(\int_\alpha^b|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$. $\langle f,g\rangle=\int_\alpha^b f(t)\overline{g(t)}\,dt \rightsquigarrow$ η νόρμα που προέρχεται από εσωτ. γινόμενο.

$\langle f,g\rangle$ είναι εσ. γιν διότι αν $\|f\|_2=0$, τότε επειδή $|f|^2$ συνεχής κ' $\int|f|^2=0\Rightarrow$
$\Rightarrow |f(t)|^2=0\ \forall t$ άρα $f=0$.

(Ενώ, $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης (Πραγματική)
αλλά όχι από εσωτερικό γινόμενο)

Θ.δ.ο $(C([a,b]),\|\cdot\|_2)$ ΟΧΙ πλήρης.

Ορίζουμε $f_n(t)=\begin{cases}0 & ,-1\leq t<0\\ nt & ,0\leq t\leq\frac{1}{n}\\ 1 & ,\frac{1}{n}<t\leq 1\end{cases}$



$\forall t\ |f_n(t)-f_m(t)|\leq 1$ κ' $|f_n(t)-f_m(t)|=0,\ t\notin[0,\frac{1}{m}]$ $(n>m)$

$\|f_n-f_m\|_2^2=\int_{-1}^{1}|f_n-f_m|^2=\int_0^{1/m}|f_n-f_m|^2\leq\frac{1}{m}\cdot 1$. Οπότε $\forall\varepsilon>0$, αν $n>m$ κ' $\frac{1}{m}<\varepsilon^2$ τότε

$\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$. Άρα, η (f_n) είναι $\|\cdot\|_2$-βασική.

Ισχυρισμός: ότι ∄ ΣΥΝΕΧΗΣ f ώστε $\|f-f_n\|_2 \to 0$.

Έστω ότι ∃ τέτοια f. Τότε $\|f-f_n\|_2^2 = \left(\int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1/n} + \int_{1/n}^{1}\right) |f(t)-f_n(t)|^2 dt =$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{0} |f(t)|^2 dt} + \int_{0}^{1/n} |f(t)-nt|^2 dt + \int_{1/n}^{1} |f(t)-1|^2 dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{όταν}} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-1}^{0} |f|^2 = 0 \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f}{\Longrightarrow}} f(t) = 0 \ \forall t \in [-1,0].$$

Επίσης, $\int_{1/n}^{1} |f(t)-1|^2 dt \leq \|f-f_n\|_2^2 \to 0 \quad \forall n$.

Άρα, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \int_{1/n}^{1} |f(t)-1|^2 dt < \varepsilon \Rightarrow \sup_{n \geq n_0} \left(\int_{1/n}^{1} |f(t)-1|^2 dt \right) \leq \varepsilon$

$$\int_{0}^{1} |f(t)-1|^2 dt \leq \varepsilon$$

Αλλά το ε ήταν τυχόν, άρα $\int_0^1 |f(t)-1|^2 dt = 0$.

$$\Downarrow$$

$$f(t) - 1 = 0 \ \forall t \in [0,1]$$

Οπότε $\left.\begin{array}{l} f(t) = 0 \ \forall t \in [-1,0] \\ \text{κ' } f(t) = 1 \ \forall t \in [0,1] \end{array}\right\}$ ΔΕ ΓΙΝΕΤΑΙ! (ασυνέχεια στο 0) Άτοπο!

Παρατηρούμε όμως, ότι αν ορίσουμε $g(t) = \begin{cases} 0 &, t \in [-1,0) \\ \text{ό,τι θέλω} &, t = 0 \\ 1 &, t \in (0,1] \end{cases}$ τότε η g

είναι Riemann ολοκληρώσιμη κ' $\|f_n - g\|_2 \to 0$

Μήπως πάντα συμβαίνει αυτό; (Άσκηση)

(Η Riemann ολ/μη με την $\|\cdot\|_2$ είναι πλήρης; ΟΧΙ (Άσκηση)). ⊥

• Θεώρημα: Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμ. υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x-y\| = d(x,E) \equiv \inf\{\|x-z\| : z \in E\}$.

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του E ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον E κ' το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.

Από την απόδειξη του θεωρήματος: F κλειστός κ' πλήρης $\leq (E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\Leftrightarrow$ F κλειστός $\leq E$, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert $\Leftrightarrow$ $F \leq (E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ κ' $\dim F = n < +\infty$

Παρατήρηση: Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, F κυρτό κ' πλήρες υποσύνολο του E. Αν $x \in E \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλ. τέτοιο ώστε $\|x-y\| = d(x,F) = \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$.

• Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε το διάνυσμα $x - P_E(x)$ είναι κάθετο στον E. Αντίστροφα, αν $y_0 \in E$ & $(x-y_0) \perp E$, τότε $y_0 = P_E(x)$.

• Πόρισμα: Αν H είναι χώρος Hilbert & M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H, τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$. Η απόσταση του z από τον M είναι η μεγαλύτερη δυνατή: $d(x, M) = \|z\|$.

• Πόρισμα: Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert H είναι πυκνός στον H ανν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0 (μηδέν).

Γ

• $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτ. γινόμενο, $F \subseteq E$ γραμμ. υπόχωρος, $x \in E$, $y \in F$. Τότε

$$x - y \perp F \iff d(x,F) = \|x-y\|.$$

($\Rightarrow$) $\forall z \in F$ έχουμε $x-y \perp F$ & $z - y \in F$. Άρα $(x-y) \perp (z-y)$ & από Π.Θ:

$$\|x-z\|^2 = \|(x-y)+(y-z)\|^2 \overset{\perp}{=} \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$

Άρα, $\|x-y\| = \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$.

($\Leftarrow$) Αν $\|x-y\| = dist(x,F)$, $\forall z \in F$ έχουμε $\|x-y\| \leq \|x-z\|$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ επειδή $y + \lambda z \in F$ έχουμε $\|x-y\| \leq \|x-(y+\lambda z)\|$

δηλ. $\|x-y\|^2 \leq \underbrace{\langle x-(y+\lambda z), x-(y+\lambda z)\rangle}_{\langle (x-y)-\lambda z, (x-y)-\lambda z\rangle} = \|x-y\|^2 - 2Re(\lambda \langle z, x-y\rangle) + \|\lambda z\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2Re(\lambda \langle z, x-y \rangle) \leq |\lambda|^2 \|z\|^2$. Βάζουμε $\lambda = \frac{1}{n}\overline{\langle z, x-y\rangle}$ & έχουμε

$\to$ γιατί $|w| = |\overline{w}|$, $w \in \mathbb{C}$

$\frac{2}{n}|\langle z, x-y\rangle|^2 \leq \frac{1}{n^2}|\langle z, x-y\rangle|^2 \|z\|^2$. Αν $\langle z, x-y\rangle \neq 0$, τότε

$\frac{2}{n} \leq \frac{1}{n^2}\|z\|^2 \; \forall n \Rightarrow 2n \leq \|z\|^2 \; \forall n$ Άτοπο. Άρα $\langle z, x-y\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y \perp z$.

Πόρισμα: Αν H ένας χώρος Hilbert & M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H, τότε $\exists z \in H$, $z \neq 0$, $z \perp M$.

Πληρότητα

Αποδ.: Αφού $M \neq H$, $\exists x \notin M$. Ξέρουμε ότι $\exists P_M(x) \in M$ με $x - P_M(x) \perp M$.

Επίσης, $x \notin M \Rightarrow x - P_M(x) \neq 0$. Παίρνουμε αυτό για z.

Η Πληρότητα ΔΕΝ μπορεί να παραληφθεί: ∃ χώρος E με εσωτ. γιν.

∃ γνήσιος κλειστός υπόχωρος $F \subseteq E$ ΧΩΡΙΣ κάθετο διάνυσμα.

Πχ. $E = (C_{00}, \|\cdot\|_2)$, $F = \{x = x(n) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x(n) = 0\}$.

[Δηλ $\langle x, (\frac{1}{n}) \rangle = 0$, αλλά $\frac{1}{n} \notin C_{00}$ ⇝ "μπακάλικα"]

Προφανώς, F γρ. υπόχωρος. Επίσης είναι κλειστός υποχ. από C-S.

Αν (x_i) με $x_i \in F$ ς' $\|x_i - x\|_2 \to 0 \Rightarrow |\sum \frac{1}{n} x(n)| = |\sum \frac{1}{n}(x(n) - x_i(n))| \underset{C-S}{\le}$

↳ διότι $\sum \frac{1}{n} x_i(n) = 0 \ \forall i$

$\underset{C-S}{\le} \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum |x(n) - x_i(n)|^2\right)^{1/2} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x - x_i\|_2 \to 0$

Άρα, $|\sum \frac{1}{n} x(n)| = 0 \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n} x(n) = 0$, δηλαδή $x = x(n) \in F$.

Ισχυρισμός: $\nexists z \in E$ με $z \perp F$ εκτός από το 0.

Έστω $z = z(n) \perp F$, τότε παρατηρώ ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underset{}{y_n} \overset{e_1 - n e_n}{=} (1, 0, \dots, 0, \overset{n\text{-θέση}}{-n}, 0, 0, \dots) \in C_{00}$ ανήκει στον F ($\ni y_n$) διότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} y_n(k) = 1 - \frac{n}{n} = 0$

Επομένως, θα έπρεπε $z \perp y_n$, δηλ. $\langle z, e_1 - n e_n \rangle = 0 \iff \langle z, e_1 \rangle = n \langle z, e_n \rangle \iff$

$\iff z(1) = n z(n) \iff z(n) = \frac{1}{n} z(1) \ \forall n$. Αλλά $z \in C_{00}$, οπότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : z(n_0) = 0$

οπότε $\frac{1}{n_0} z(1) = 0 \Rightarrow z(1) = 0 \Rightarrow z = 0$.

Το ίδιο πχ. στον ℓ^2 είναι OK. Δηλαδή, αν $E = \ell^2$ (→ επειδή ℓ^2 πλήρης) ς'

υπόχωρος $F = \{x = x(n) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x(n) = 0\}$, τότε F γνήσιος, κλειστός ς' το

$(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ ς' είναι $\perp F$. ⌟

• Αν A είναι μη κενό υποσύνολο ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο,

θέτουμε $A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in A\}$.

αλλιώς: Έστω $y_n \in A^{\perp}$ με $y_n \to y \in E$
$y_n \in A^{\perp} \Rightarrow \forall x \in A \ \langle x, y_n \rangle = 0$ ς' $\langle x, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ $\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in A \Rightarrow y \in A^{\perp}$.

#1. $A^{\perp}$ πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του E.

2. $A^{\perp} = \{0\} \iff span(A)$ πυκνός στον E, όπου E Hilbert.

Απόδειξη:

1. $A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} \{x \in E : \langle x, a \rangle = 0\}$. Όμως, κάθε $\{x \in E : \langle x, a \rangle = 0\}$ είναι υπόχωρος διότι

η $f_a : x \mapsto \langle x, a \rangle$ είναι γραμμική ς' $\{x \in E : \langle x, a \rangle = 0\} = \ker f_a$. Άρα, $A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} \ker f_a$

ς' η f_a συνεχής διότι $|f_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \le \|x\| \|a\|$ (C-S). $x_n \to x \Rightarrow f_a(x_n) \to f_a(x)$ οπότε

$\forall \ker f_a = f_a^{-1}(\{0\})$ κλειστός.

Άρα $A^\perp$: τομή γρ. υποχώρων => υπόχωρος
τομή κλειστών => κλειστό.

Bessel => Cauchy-Schwarz! (Η Bessel έχει σαν συνέπεια την C-S).

Bessel: $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθικό χώρο εσωτ.

$\forall x \in E: \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2 \overset{n=1}{\Longrightarrow} |\langle x, e\rangle| \le \|x\|$, $\{e\}$ ορθικό $\Leftrightarrow \|e\|=1$.

$y \neq 0$, $e = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow |\langle x, \frac{y}{\|y\|}\rangle| \le \|x\| \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$ Cauchy Schwarz.

Παρατήρηση: η απόδειξη της Bessel χρησιμοποιεί μόνο τον ορισμό του εσωτ. γινομένου κ' όχι ότι η $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot\rangle}$ είναι νόρμα. ⌟

• Έστω H χώρος με εσωτ. γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H κ' $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.

ΓΕΝΙΚΑ: ΠΑΝΤΑ $A \subseteq \overline{\text{span} A}$!!

2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{span}(A)} = H$

⌜ $x \perp A \xrightarrow[\text{του } \langle\cdot,\cdot\rangle]{\text{γραμμικότητα}} x \perp \text{span} A \xrightarrow[\text{του } \langle\cdot,\cdot\rangle]{\text{συνέχεια}} x \perp \overline{\text{span} A}$ $\left\{ \begin{array}{l} \overline{\text{span} A}: \text{ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος} \\ \text{που περιέχει το } A. \ (\supseteq A). \end{array} \right.$

Επίσης, $x \perp \overline{\text{span} A} \Rightarrow x \perp A$. Δηλαδή, $A^\perp = (\overline{\text{span} A})^\perp$. Οπότε,
↳ (χωρίς πλήρότητα)

$A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow (\overline{\text{span} A})^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{span} A} = H$. ⌟

better:

"⇒" $\left.\begin{array}{l} A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{A} = H \\ \text{κ' } A \subseteq \text{span} A \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{\text{span} A} \end{array}\right\} \Rightarrow H \subseteq \overline{\text{span} A} \Rightarrow \overline{\text{span} A} = H$

"⇐" Έστω $A^\perp \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \in A^\perp \Rightarrow x \perp A \overset{\text{γρ}}{\underset{\langle,\rangle}{\Longrightarrow}} x \perp \text{span} A \overset{\text{συν}}{\underset{\langle,\rangle}{\Longrightarrow}} x \perp \overline{\text{span} A}$
$\Rightarrow x \in (\overline{\text{span} A})^\perp \Rightarrow (\overline{\text{span} A})^\perp \neq \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{span} A} \neq H$.

$\langle x, a\rangle = 0 \ \forall a \in A \Rightarrow \langle x, \sum \lambda_i a_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, \lim \sum \lambda_i a_i\rangle = 0$

3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$. ⌜ Προφανώς ⌟

4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

5. $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$ $(= A^{\perp\perp\cdots\perp})$

⌜ Από (3), $A \subseteq A^{\perp\perp} \overset{(4)}{\Longrightarrow} A^{\perp\perp\perp} \subseteq A^\perp$
Από (3) στον $A^\perp$, $A^\perp \subseteq A^{\perp\perp\perp}$ ⌟

6. Αν H Hilbert κ' E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.

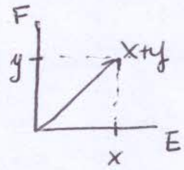
⌜ Από (3), $E \subseteq E^{\perp\perp}$. Έστω $E \subsetneq E^{\perp\perp}$.

$E^{\perp\perp}$ = κλειστός υπόχωρος του H => $E^{\perp\perp}$ χώρος Hilbert

Άρα, αν $E \subsetneq E^{\perp\perp} \Rightarrow \exists z \in E^{\perp\perp}$, $z \neq 0$ κ' $z \perp E$.

$\left.\begin{array}{l} z \in E^\perp \\ z \in E^{\perp\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow z \in E^\perp \cap E^{\perp\perp} = \{0\}$. Άτοπο. Άρα $E = E^{\perp\perp}$ (σε χώρους Hilbert!) ⌟

7. Αν H Hilbert κ' E,F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E\perp F$, τότε $E+F$ κλειστός.



Γ $E+F=\{x+y : x\in E, y\in F\}$.

Υπόχωρος είναι πάντα. Θ.δ.ο είναι πλήρης.

Έστω $z\in \overline{E+F} \Rightarrow \exists z_n\in E+F : z_n\to z$. Αλλά τότε $\exists x_n\in E, \exists y_n\in F$:

$z_n=x_n+y_n$. Α.ν.δ.ο (x_n) συγκλίνει στον E, (y_n) συγκλίνει στον F $\left(\begin{smallmatrix}\text{αφού } E,F\\ \text{κλειστοί}\end{smallmatrix}\right)$

Όμως, $\forall n,m$ $\|x_n-x_m\| \overset{\text{Π.Θ}}{\le} \|z_n-z_m\|$ διότι $\|z_n-z_m\|^2=\|(x_n-x_m)+(y_n-y_m)\|^2 =$

$\overset{\text{Π.Θ}}{=} \|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2 \geq \|x_n-x_m\|^2$. Άρα η (x_n) βασική, επομένως συγκλίνει

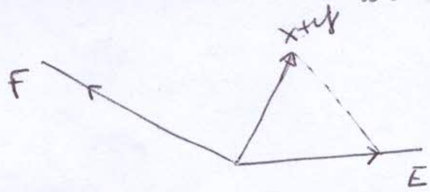
$(x_n-x_m)\perp(y_n-y_m)$

σε κάποιο $x\in E$. Τότε όμως, $(y_n)=(z_n-x_n)$ συγκλίνει στο $y=z-x\in F$

⇒ επειδή η (z_n) είναι βασική ως συγκλίνουσα.

Άρα, $z=x+(z-x)\in E+F$.

Όταν $E\not\perp F$, μπορεί $\|x\|>\|x+y\|$.



Σε καθέτους, Δε γίνεται !

Δηλ, όταν $E\perp F$, πάντα $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\,\|y\|$.

Μπορεί όμως να πλησιάζει την "=".

Άσκηση: Αν δεν πλησιάζει, τότε $E+F$ κλειστός.

δηλ αν $\exists\lambda<1$ ώστε $|\langle x,y\rangle|\le\lambda\|x\|\,\|y\|$ $\forall x\in E, \forall y\in F \Rightarrow E+F$ κλειστός

δηλ $\forall x\in E, \forall y\in F$ με $\|x\|=1=\|y\|$ $|\langle x,y\rangle| = |\cos(\widehat{x,y})|\le\lambda<1$.

δηλ η οξεία γωνία $(\widehat{x,y})$ πρέπει να φράσσεται μακριά απ' το 0.

Προ- τελευταία άσκηση πρώτου φυλλαδίου

• Θεώρημα (Ορθογώνια Διάσπαση): Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε $M\oplus M^\perp=H$. ($M\cap M^\perp=\{0\}$, $H=M+M^\perp$)

Γ Δηλαδή $\forall x\in H$ γράφεται ! $x=y+z$, $y\in M$, $z\in M^\perp$

Μοναδικότητα: (Προφανές) $\left.\begin{array}{ll} x=y+z, & y,y'\in M\\ x=y'+z', & z,z'\in M^\perp\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{y-y'}_{\in M}=\underbrace{z'-z}_{\in M^\perp} \Rightarrow y-y'=z'-z=0$

διότι $M\cap M^\perp=\{0\}$.

Έχουμε $M, M^\perp$ κλειστοί υπόχ. $\overset{(7)}{\Longrightarrow} M+M^\perp$ κλ. υποχ. του H (το δείξαμε πριν)

Πρέπει ν.δ.ο $M+M^\perp=H$.

$\left.\begin{array}{l} M\subseteq M+M^\perp\\ M^\perp\subseteq M+M^\perp\end{array}\right\} \overset{(4)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l}(M+M^\perp)^\perp\subseteq M^\perp\\ (M+M^\perp)^\perp\subseteq M^{\perp\perp}\end{array}\right\} \Rightarrow (M+M^\perp)^\perp\subseteq M^\perp\cap(M^\perp)^\perp=\{0\}$. Άρα, ο κλειστός υπόχωρος $M+M^\perp$ δεν έχει κάποιο κάθετο σ'αυτόν $\Rightarrow = H$.

$M+M^\perp = \{0\} \iff \overline{M+M^\perp} = M+M^\perp = H$ (πλήρωση πάλι) $\lrcorner$

• Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$P_M : H \to H \ : y \mapsto P_M(y)$ είναι γραμμική κ̸ συνεχής.

Πχ.

Στον $(c_{00}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M, ώστε $M^\perp = \{0\}$.

$$M = \{x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0\}.$$

$\ulcorner$

Έχουμε H Hilbert, M γν. κλ. υπόχωρο. Δείξαμε ότι $\forall y \in H$ γράφεται !

$y = y_1 + y_2$ με $y_1 \in M$ κ̸ $y_2 \in M^\perp$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $P_M : H \to H$, $y \mapsto y_1$.

• καλά ορισμένη: το y_1 ορίζεται μοναδικά.

• γραμμική: Έστω $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$
κ̸ $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in M$, $y_2 \in M^\perp$
κ̸ $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow x + \lambda y = x_1 + x_2 + \lambda y_1 + \lambda y_2 = \underbrace{(x_1 + \lambda y_1)}_{\in M} + \underbrace{(x_2 + \lambda y_2)}_{\in M^\perp}$

Από την άλλη, το $x + \lambda y$ γράφεται ! $x + \lambda y = z_1 + z_2$, $z_1 \in M$, $z_2 \in M^\perp$

Από μοναδικότητα, $z_1 = x_1 + \lambda y_1$.

$P_M(x) = x_1$, $P_M(y) = y_1$
$P_M(x + \lambda y) = x_1 + \lambda y_1$ $\Rightarrow$ γραμμική.

\# $P_M(x) \in M$ κ̸ $x - P_M(x) \perp M$ άρα (όπως έχουμε δείξει) το $P_M(x)$ είναι το πλησιέστερο διάνυσμα του M στο x.

• συνεχής: $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$

Ξέρουμε ότι $P_M(x) \perp (x - P_M(x)) \xRightarrow{\text{Π.Θ}} \|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$

Οπότε, $\|x\| \geq \|P_M(x)\|$ ①

Αν (x_n) με $x_n \to x$, τότε $\|P_M(x_n) - P_M(x)\| \overset{P_M}{\underset{\text{γρ.}}{=}} \|P_M(x_n - x)\| \overset{①}{\leq} \|x_n - x\| \to 0$.

($H = M \oplus M^\perp$
$x = x_1 + x_2$
$x \mapsto x_1$ γρ. + συν. διότι $\|x_1\| \leq \|x\|$)

$\rightarrow P_M : H \to H$ γραμμική + συνεχής

$\rightarrow P_M(H) = M$ απόδ: $\forall x \in H$ $P_M(x) \in M$ άρα $P_M(H) \subseteq M$.

Επίσης, $\forall x \in M$ έχουμε $P_M(x) = x$ άρα $x \in P_M(H)$.

Συνεπώς, $P_M(H) = M$.

$\lrcorner$