

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)¹

Θεώρημα 1 Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο² Hilbert H , ή η εξίσωση

$$x - Kx = y \tag{1}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$, ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι η (1) έχει, για $y = 0$, το πολύ μια λύση (οπότε αποκλείεται το δεύτερο ενδεχόμενο), τότε από την συμπάγεια του τελεστή K συμπεραίνουμε την ύπαρξη λύσης της (1) για κάθε $y \in H$, και μάλιστα ακριβώς μιας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γνωστό όταν $\dim H < +\infty$. Το γεγονός ότι ισχύει σε απειροδιάστατους χώρους είναι μία από τις βασικές αιτίες που οδήγησε στην μελέτη των συμπαγών τελεστών.

Για την απόδειξη, θα χρειασθούμε δύο Λήμματα:

Λήμμα 2 Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Απόδειξη Αν θέσουμε

$$S_m = \sum_{n=0}^m T^n$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \rightarrow 0$,

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \tag{2}$$

Όμως η ακολουθία $\{S_m\}$ συγκλίνει. Πράγματι, αν $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Επειδή $\|T\| < 1$, έπεται ότι η $\{S_m\}$ είναι βασική ακολουθία στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$, επομένως συγκλίνει σε έναν $S \in \mathcal{B}(H)$. Από την (2) έχουμε ότι $(I - T)S = S(I - T) = I$, άρα $S = (I - T)^{-1}$. \square

Λήμμα 3 Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι $I - I$.

¹fredun, 25/5/2015, compiled 25 Μαΐου 2015

²Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ο $I - K$ είναι 1-1. Υπάρχει ένας τελεστής $F \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|K - F\| < 1$. Αν $K_1 = K - F \in \mathcal{K}(H)$, τότε από το Λήμμα 2 ο τελεστής $I - K_1$ είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $G = F(I - K_1)^{-1}$.

Παρατηρούμε ότι ο $I - G$ είναι 1-1.

Πράγματι, αυτό είναι φανερό, αν παρατηρήσει κανείς ότι ³

$$I - K = (I - G)(I - K_1) \quad \text{ισοδύναμα} \quad I - G = (I - K)(I - K_1)^{-1}.$$

Όμως ο χώρος $H_o := \text{im } G = \text{im } F$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Θέτουμε $T = (I - G)|_{H_o}$. Ο T απεικονίζει τον H_o στον H_o (διότι αν $x \in H_o$ τότε $Tx = x - Gx \in H_o$) και είναι 1-1. Επομένως, αφού $\dim H_o < \infty$, ο T απεικονίζει τον H_o επί του H_o . Δηλαδή, για κάθε $v \in H_o$ υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = v$.

Έπεται τώρα ότι $(I - G)(H) = H$.

Πράγματι, για κάθε $y \in H$, εφόσον $v = Gy \in H_o$, υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = Gy$. Θέτοντας τώρα $x = y + u$ έχουμε

$$(I - G)x = (y - Gy) + (u - Gu) = (y - Gy) + Gy = y.$$

Από τη σχέση $I - K = (I - G)(I - K_1)$ προκύπτει τώρα ότι και ο $I - K$ είναι επί του H . Κατά συνέπεια, ορίζεται καλά η γραμμική απεικόνιση

$$Y = (I - K)^{-1} : H \rightarrow H$$

και μένει να δειχθεί ότι είναι φραγμένη. ⁴

Έστω ότι δεν είναι. Υπάρχει τότε στον H μια ακολουθία (x_n) απο μοναδιαία διανύσματα ώστε $\|Yx_n\| \geq n$ για κάθε n .

Θέτουμε $y_n = \frac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$. Αφού ο K είναι συμπαγής και η (y_n) είναι φραγμένη, θα υπάρχει μια υπακολουθία (y_{k_n}) ώστε η (Ky_{k_n}) να συγκλίνει, έστω στο z . Όμως

$$\|(I - K)y_{k_n}\| = \left\| (I - K) \frac{Yx_{k_n}}{\|Yx_{k_n}\|} \right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Yx_{k_n}\|} \leq \frac{1}{n}$$

άρα $(I - K)y_{k_n} \rightarrow 0$. Εφόσον $Ky_{k_n} \rightarrow z$, έχουμε $y_{k_n} \rightarrow z$ (άρα $\|z\| = 1$). Από τη συνέχεια του K έπεται ότι $Ky_{k_n} \rightarrow Kz$, επομένως $Kz = z$ από τη μοναδικότητα του ορίου, δηλ. $(I - K)z = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο $(I - K)$ είναι 1-1. \square

Απόδειξη του Εναλλακτικού Θεωρήματος Fredholm.

Έστω ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Δηλαδή, ισοδύναμα, έστω ότι ο πυρήνας $M_1 = \ker(I - K)$ δεν είναι τετριμένος. Τότε είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι ο K περιορισμένος στον M_1 είναι ο ταυτοτικός τελεστής, και είναι συμπαγής.

Έστω τώρα ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει μόνον τη μηδενική λύση. Δηλαδή, ο $I - K$ είναι 1-1. Τότε από το Λήμμα 3 ο $I - K$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε για κάθε $y \in H$ η εξίσωση $x - Kx = y$ έχει την μοναδική λύση $x = (I - K)^{-1}y$. \square

Η επόμενη Πρόταση συμπληρώνει το Θεώρημα:

³ $(I - G)(I - K_1) = (I - K_1) - G(I - K_1) = I - K_1 - F = I - K$

⁴ Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε όμως μια ανεξάρτητη και στοιχειώδη απόδειξη.

Ορισμός 1 Φάσμα (*spectrum*) ενός φραγμένου τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ ονομάζεται το σύνολο

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο τελεστής } \lambda I - T \text{ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο}\}.$$

Βεβαίως οι ιδιοτιμές του T ανήκουν στο φάσμα του, όμως δεν το εξαντλούν.⁵ Για παράδειγμα, ο τελεστής $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ με $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ δεν έχει ιδιοτιμές, αλλά $0 \in \sigma(T)$ (ο T δεν είναι αντιστρέψιμος).

Πρόταση 4 Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{K}(H)$ το σύνολο $\sigma(A) \setminus \{0\}$ αποτελείται μόνον από ιδιοτιμές του A και, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Απόδειξη Αν το $\lambda \neq 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A , τότε ο τελεστής $\lambda I - A$ είναι 1-1, άρα το ίδιο ισχύει και για τον $I - \frac{A}{\lambda}$. Επειδή ο $\frac{A}{\lambda}$ είναι συμπαγής, έπεται από το Λήμμα 3 ότι ο $I - \frac{A}{\lambda}$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε και ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος.

Μένει να δειχθεί ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του A , αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία. Απο την επόμενη Πρόταση όμως προκύπτει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$\left\{ \lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| > \frac{1}{n} \right\}$$

είναι πεπερασμένο. Άρα το $\sigma_p(A)$ είναι αριθμήσιμο και έχει μόνο πιθανό σημείο συσσώρευσης το 0. \square

Πρόταση 5 Αν H είναι χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{K}(H)$ και $\epsilon > 0$, δεν υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ του A με $|\lambda| \geq \epsilon$.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ και μια άπειρη ακολουθία $\{x_n\}$ από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ όπου $|\lambda_n| \geq \epsilon$ (δεν υποθέτουμε ότι οι λ_n είναι διαφορετικές ανά δύο).

Θέτουμε τότε $N_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Ισχυρισμός Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $A(N_n) \subseteq N_n$ και $(A - \lambda_n I)(N_n) \subseteq N_{n-1}$.

Απόδειξη Έστω $y \in N_n$, γράφουμε $y = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$ όπου $\mu_k \in \mathbb{C}$. Έχουμε

$$Ay = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k x_k \in N_n$$

$$\text{και } (A - \lambda_n I)y = \sum_{k=1}^n \mu_k (\lambda_k - \lambda_n) x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (\lambda_k - \lambda_n) x_k + 0x_n \in N_{n-1}.$$

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Επειδή ο N_{n-1} είναι γνήσιος υπόχωρος του N_n (αφού $x_n \notin [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$) υπάρχει $y_n \in N_n$ με $\|y_n\| = 1$ ώστε $y_n \perp N_{n-1}$.

Τότε, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n > m$ έχουμε $Ay_m \in N_m \subseteq N_{n-1}$ και $(A - \lambda_n I)y_n \in N_{n-1}$, άρα $(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m \in N_{n-1}$ οπότε, αφού $\lambda_n y_n \perp N_{n-1}$, έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$\|Ay_n - Ay_m\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m + \lambda_n y_n\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m\|^2 + \|\lambda_n y_n\|^2 \geq |\lambda_n|^2 > \epsilon^2.$$

Επομένως, η ακολουθία $\{Ay_n\}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, ενώ η $\{y_n\}$ είναι φραγμένη. Αφού ο A είναι συμπαγής, έχουμε καταλήξει σε άτοπο. \square

⁵Ενώ (σε απειροδιάστατους χώρους) το σύνολο των ιδιοτιμών ενός τελεστή μπορεί να είναι κενό, αποδεικνύεται ότι το φάσμα οποιουδήποτε φραγμένου τελεστή σε χώρο Banach είναι μη κενό.