$(E, \| \ \|) \xrightarrow{f} (\mathbb{K}, | \ |)$ γραμμ + φρ

$\cap$

$(F, \| \ \|) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathbb{K}, | \ |)$ " "

$\exists ! \tilde{f} : F \to \mathbb{K}$ " "

$\bar{E} = F$ $\|\tilde{f}\| = \|f\|$

; $\forall f \in E^* \to \tilde{f} \in F^*$

$f \longmapsto \tilde{f}$ ισομετρία

επί διότι

$\forall \ g \in F^*$

ορίζω $f = g|_E \in E^*$

μάλιστα $\|f\| \overset{(*)}{=} \|g\|$

Αποδ $(*)$:

$\|g\| = \sup\{|g(x)| : x \in F, \|x\| = 1\}$

$\geq \sup\{\underset{\substack{\| \\ |f(x)|}}{|g(x)|} : x \in E \quad " \ \} = \|f\|$

άρα: $\|g\| \geq \|f\|$.

Όμως, $\forall x \in F \quad \exists (x_n) : x_n \in E : x_n \to x$

οπότε: $|g(x)| = \lim_n |g(x_n)| = \lim_n |f(x_n)|$

$\leq \lim_n \|f\| \|x_n\|$ ($\exists$ το $\lim \|x_n\|$)

$= \|f\| \|x\|$

$\forall x \in F$,

$|g(x)| \leq \|f\| \|x\| \Rightarrow \|g\| \leq \|f\|$.

Ο συζυγής ενός τελεστή:

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$: Hilbert

$\mathcal{H}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{H}_2$ γραμμ. + φραγμ.

$\exists ?\ \mathcal{H}_1 \xleftarrow[S]{} \mathcal{H}_2$

τέτοιος ώστε

$\forall x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2 : \langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, Sy \rangle_1$

σε χώρους πεπ. διάστασης:

Αν $T \approx [a_{ij}]$ (ως προς κάποιες ο.κ. βάσεις)

τότε: $S \approx [\bar{a}_{ji}]$.

Όταν $\dim \mathcal{H}_2 = +\infty$: Έστω $y \in \mathcal{H}_2$ να ορίσω $Sy \in \mathcal{H}_1$

Θεωρώ την: $f_y : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longmapsto Tx \longrightarrow \langle Tx, y \rangle$

γραμμ. + φραγμ.

Αφού $\mathcal{H}_1$ Hilbert, $\Rightarrow$ από Riesz, $\exists ! Sy \in \mathcal{H}_1$:

$$f_y(x) = \langle x, Sy \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}_1$$

$$\| \langle Tx, y \rangle.$$

$\forall y\in H_2$ ορίζω $Sy\in H_1$ ώστε

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \quad \forall x\in H_1$$

Προφ. S γραμμική:

$S(y_1+\lambda y_2)$:

$\forall x \in H_1$, $\langle x, \underbrace{S(y_1+\lambda y_2)}_{z_1}\rangle =$

$= \langle Tx, y_1+\lambda y_2\rangle$

$= \langle Tx, y_1\rangle + \bar{\lambda}\langle Tx, y_2\rangle$

$= \langle x, Sy_1\rangle + \bar{\lambda}\langle x, Sy_2\rangle$

$\left(\langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle \ \forall x\right.$ $\quad = \langle x, Sy_1\rangle + \langle x, \lambda S y_2\rangle$

$\left.\langle x, z_1 - z_2\rangle = 0 \ \forall x\right)$ $\quad = \langle x, \underbrace{Sy_1 + \lambda S y_2}_{z_2}\rangle$

άρα $\forall x\in H_1$ έχω $\langle x, S(y_1+\lambda y_2)\rangle = \langle x, Sy_1 + \lambda S y_2\rangle$

$$\Rightarrow S(y_1+\lambda y_2) = Sy_1 + \lambda S y_2$$

S φραγμ.?

$\rightarrow \langle x, Sy\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x\in H_1 \ \forall y \in H_2$

$|\langle x, Sy\rangle| \leq \|Tx\|\,\|y\| \leq \|T\|\,\|x\|\,\|y\|$

Βάζω $x = Sy$:

$\|Sy\|^2 = |\langle Sy, Sy\rangle| \leq \|T\|\,\|Sy\|\,\|y\|$

αν $Sy \neq 0$: $\|Sy\| \leq \|T\|\,\|y\|$ ισχύει $\forall y \in H_1$

(αν $Sy = 0$ προφ.)

$\Rightarrow S$ φραγμ. και μάλιστα $\|S\| \leq \|T\|$

Ομοίως: $|\langle Tx, y\rangle| \leq \|S\|\,\|x\|\,\|y\|$

βρίσκω $\|T\| \leq \|S\|$

άρα $\|T\| = \|S\|$

∀ φρ $H_1 \xrightarrow{T} H_2$

∃ φρ $H_2 \xrightarrow{S} H_1$ τω $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$

Ο S είναι μοναδικός γιατί αν

$H_2 \xrightarrow{S'} H_1$ με $\langle Tx, y\rangle = \langle x, S'y\rangle$ $\forall x, y$

Ο S ονομάζεται ο <u>συζυγής</u> (adjoint) του T και γράφεται T^*

τότε $\langle x, Sy\rangle = \langle x, S'y\rangle$ $\forall x, \forall y$

$\Downarrow$

$Sy = S'y$ $\forall y$

$\Downarrow$

$S = S'$

<u>Παρ</u> <u>Κρίσιμο</u>:

T <u>φραγμ</u> και ορίζεται σε <u>πλήρη</u> χώρο με <u>εσωτ.</u> γινομ.

ειδική περίπτωση: αν $H_1 = H_2 = H$

τότε ο $T^*: H \to H$

οπότε $\forall T \in \mathcal{B}(H)\ \exists!\ T^* \in \mathcal{B}(H)$

μπορώ $T^* T$ κ.λπ.

(αργότερα)

Παράδ.: στον $(\mathbb{C}^n, \| \|_2)$ αν $T \sim [a_{ij}]$

τότε $T^* \sim [\overline{a_{ji}}]$

διότι

$$a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle = \langle e_j, T^* e_i \rangle = \overline{\langle T^* e_i, e_j \rangle} =$$

Παράδ. στον $(\ell^2, \| \|_2)$ $\forall x = (x(n))$ ορίσαμε

$$(D_a(x))(n) = a(n)x(n) \quad \forall n$$

όπου $a \in \ell^\infty$ δηλ. $\sup |a(n)| = \|a\|_\infty < +\infty$

να βρω τον D_a^*:

$$\langle D_a^* x, y \rangle = \langle x, D_a y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \overline{(D_a y)(n)}$$

$$= \sum x(n) \overline{a(n) y(n)}$$

$$= \sum \left(\overline{a(n)}\, x(n)\right) \overline{y(n)}$$

όπου $\bar{a} = (\overline{a(n)})$

$$= \sum (D_{\bar{a}} x)(n) \overline{y(n)}$$

$$= \langle D_{\bar{a}} x, y \rangle \quad \forall x, y \in \ell^2$$

άρα $D_a^* x = D_{\bar{a}} x \quad \forall x$

άρα $D_a^* = D_{\bar{a}}$