23/3/2015

Στόχος: ισομ. εμφ. Hilbert

$$\varphi: (E, \langle \cdot , \cdot \rangle) \longrightarrow (H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$$

γραμμ., ισομ., πυκνή εικόνα: $\overline{\varphi(E)} = H$

Πλήρωση: "ουσιαστικά μοναδική".

<u>Προφ</u>: Ο χώρος των τελεστών:

$(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$: χώροι με νόρμα

$T: E \longrightarrow F$ γραμμικός και φραγμ.

<u>Ορ</u> $\mathcal{B}(E,F) = \{ T: E \longrightarrow F$ γραμμ. + συνεχ.$\}$

$\mathcal{B} =$

πχ $T = 0$

$\mathcal{L}(E,F)$: γραμμικοί απλώς

• $\mathcal{B}$ γραμμ. χώρος με πράξεις κατά σημείο:

$T, S \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ορίζω $T + \lambda S : E \longrightarrow F$

$$(T+\lambda S)(x) := T(x) + \lambda S(x) \in F$$

γνωστό + εύκολο ότι η $T+\lambda S$ είναι γρ. συνεχής $\Longleftrightarrow$ φραγμ.

$\|T+\lambda S\| \le ?$

$\forall x \in E : \|(T+\lambda S)(x)\|_F$
$= \|T(x) + \lambda S(x)\|_F \le$

$\le \|T(x)\|_F + |\lambda| \, \|S(x)\|_F$

$\le \|T\| \, \|x\|_E + |\lambda| \, \|S\| \, \|x\|_E$

$( \|Tx\|_F \le \|T\| \, \|x\|_E \quad \forall x \in E )$

άρα $\forall x \in E$

$\|(T+\lambda S)(x)\|_F \le (\|T\| + |\lambda| \, \|S\|) \|x\|_E$

άρα $T+\lambda S$ φραγμ. και $\Downarrow$ ορ. της $\| \ \|$ ισχ.

$\|(T+\lambda S)\| \le \|T\| + |\lambda| \, \|S\|$

$T+\lambda S \in \mathcal{B}(E,F)$

και μάλιστα

η $\|\cdot\| : \mathcal{B}(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$

Είναι όντως νόρμα στο $\mathcal{B}$

- $\|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$
- $\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$ (εύκολα)
- $\|T\| = 0$ τότε $\|Tx\|_F = 0 \quad \forall x \in E$

  άρα $Tx = 0$ ״

  άρα $T = 0$

<u>Πρόταση</u> Αν $(F, \| \|_F)$ είναι πλήρης, τότε $(\mathcal{B}(E,F), \| \|)$ είναι Banach

<u>Απόδ</u> Έστω $(T_n)$, $T_n \in \mathcal{B}$ που είναι βασ.

$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \; \|T_n - T_m\| < \epsilon$

<u>δηλ</u> $\forall x \in E$

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \leq$$

$$\|T_n - T_m\| \, \|x\| < \epsilon \|x\|$$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\epsilon) : \forall n, m \geq n_0$ και $\forall x \in E$ (με $\|x\| \leq 1$)

ισχύει

$$\Longrightarrow \|T_n x - T_m x\|_F < \epsilon \|x\|_E$$

Άρα η $(T_n x)$ είναι βασική στο $(F, \| \|_F)$

οπότε (πληρότητα του $F$) $\exists y_x \in F$:

$$\|T_n x - y_x\|_F \longrightarrow 0 \quad \text{όταν } n \to \infty$$

συμβολίζω $y_x = T(x)$

$\forall x \in E$ έχω $T(x) \in F$ με $T(x) = \lim_n T_n(x)$

οπότε $T : E \to F$ και όριο <u>γραμμ</u> απεικ.

Επεται ότι $T$ γραμμ:

$$T(x_1+\lambda x_2) = \lim_n T_n(x_1+\lambda x_2)$$
$$= \lim_n \left(T_n(x_1) + \lambda T_n(x_2)\right)$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$T(x_1) \quad + \lambda T(x_2)$$
$$= T(x_1) + \lambda T(x_2)$$

$\forall \epsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0$

$\forall x \in E, \ \|x\| \leq 1$

$$\|T_n x - T_m x\| < \epsilon$$
$$\downarrow n\to\infty$$
$$\|Tx - T_m x\| \leq \epsilon \qquad \forall m \geq n_0$$

δηλ $\forall m \geq n_0, \ \|(T-T_m)(x)\| \leq \epsilon \ (*)$

άρα η $T-T_m$ είναι φραγμ

και συνεπώς η $T=(T-T_m)+T_m$ είναι φραγμ

και τώρα η $(*)$ δείχνει

ότι

$\forall m \geq n_0$

$$\|T-T_m\| = \sup\{\|(T-T_m)(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \epsilon$$

οπότε

$$\|T-T_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Δεν χρειάζεται $(E,\|\ \|)$ πλήρης

Αλλά " $(F,\|\ \|)$ πλήρης

Ασκ Αν ο $\mathcal{B}(E,F)$ πλήρης $\Rightarrow F$ πλήρης

Ειδικότερα, όταν $F = \mathbb{C}$

γράφω: $\mathcal{B}(E, \mathbb{C}) := E^*$

: ο τοπολογικός δυικός του $(E, \| \, \|)$

$E^* = \{ f : E \to \mathbb{C}$ γραμμ. + φραγμ. $\}$

$\|f\| = \sup \{ |f(x)| \; ; \; x \in E, \|x\| \leq 1 \}$

$(E^*, \| \, \|)$ Banach

**Παρ** Όταν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ο $\mathcal{B}(E, F)$

δεν είναι Hilbert όταν $\dim F \geq 2$

(άσκ.)

Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτ. γινομ.

Θεωρώ τον $(E^*, \| \, \|)$ : πλήρης

**Άσκ** ο $E^*$ είναι χώρος Hilbert

"Η" πλήρωση ενός $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

<u>Θεώρημα</u> $\exists$ χώρος Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και μια γραμμική ισομετρία

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{με } \overline{\varphi(E)} = \mathcal{H}$$

και αν $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι Hilbert

και $\exists$ $\psi : E \rightarrow \mathcal{K}$ γραμμ. ισομ. με $\overline{\psi(E)} = \mathcal{K}$ τότε

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ E & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{K} \end{array}$$

$\exists$ $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ ισομετρία επί τ.ω

$\forall x \in E$

$$T(\varphi(x)) = \psi(x)$$

**Προτ** $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ διαχ.
τότε $\exists \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ΟΚ βάση του $E$

**απ)** $\forall x \in E: \; x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$

$$\|x\|^2 = \sum |\langle x, x_n \rangle|^2$$

οπότε
$$E \longrightarrow \ell^2$$
$$x \longmapsto (\langle x, x_n \rangle)$$

είναι γραμμική ισομετρία
με εικόνα $\supseteq c_{00}$
άρα πυκνή

Όμως ο $\ell^2$ είναι πλήρης: ΝΑ μια πλήρωση.
αλλά, μέσω της επιλογής μιας ΟΚ βάσης

$(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ χώρος μ' εσωτ. γινόμενο

ο χώρος των γραμμ. μορφών $E \to \mathbb{C}$
πλήρης

Αντίστοιχα:

$\mathcal{H}_1 = \{ f : E \to \mathbb{C}$ αντιγραμμική και συνεχ$\}$

δηλ: $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\forall x, y \in E$

$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$

με την $\quad \|f\| = \sup \{ |f(x)| : \|x\| \leq 1 \}$

$(\mathcal{H}_1, \| \ \|)$ πλήρης (χώρος Banach)

( παράδ. $E = C([0,1])$, $\langle h, g \rangle = \int_0^1 h(x) \overline{g(x)} \, dx$ )

Εμφυτεύω τον $E$ στον $\mathcal{H}_1$:

$x \in E \ ; \ \varphi_x : E \to \mathbb{C}$

$y \longmapsto \langle x, y \rangle$

όπου $\quad \varphi_x(\lambda y) = \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

δηλ. $\varphi_x$ αντιγραμμ. $\qquad = \bar{\lambda} \varphi_x(y)$

και: $\|\varphi_x\| = \sup \{ |\langle x, y \rangle| : \|y\| = 1 \}$

$\leq \|x\|$

και, αν για $x \neq 0$ βάλω $y = \frac{x}{\|x\|}$

τότε $\quad \varphi_x(y) = \frac{\langle x, x \rangle}{\|x\|} = \|x\|$

είναι φραγμ. και $\|\varphi_x\| = \|x\|$

Έχω μια απεικ:

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{H}_1$$
$$x \longmapsto \varphi_x \quad \text{ισομετρία}$$

Είναι και γραμμική:

$$\varphi_{x+\lambda x'} = \varphi_x + \lambda \varphi_{x'} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ x, x' \in E$$

$$\varphi_{x+\lambda x'}(y) = \langle x+\lambda x', y\rangle$$
$$= \langle x, y\rangle + \lambda \langle x', y\rangle$$
$$= \varphi_x(y) + \lambda \varphi_{x'}(y) \quad \forall y \in E$$

[ Πχ $E = C([0,1])$ $\forall h \in C([0,1])$

$$\varphi_h(g) = \langle h, g\rangle$$
$$= \int h(x)\overline{g(x)}\,dx \ ]$$

ονομάζω $\mathcal{H} = \overline{\varphi(E)} \subseteq \mathcal{H}_1$ (ισχύει $= ?$)

οπότε έχω $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{H}$ γραμμ. ισομ. με $\overline{\varphi(E)} = \mathcal{H}$

Όπως ο $(\mathcal{H}, \| \ \|)$ είναι χώρος Banach

και περιέχει μια ισομετρική και πυκνή εικόνα του $E$

Ισχυρίζομαι ότι ο $\mathcal{H}$ είναι Hilbert

δηλ: $\exists$ εσωτ. γινομ. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στο $\mathcal{H}$

τ.ω $\forall f \in \mathcal{H}, \ \|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$

<u>Απόδ</u> Στον $\varphi(E) = \{ \varphi_x : x \in E \} \subseteq \mathcal{H}$ (πυκνός υποχ.)

Ήδη έχω εσωτ. γινομ:

$$\langle \varphi_x, \varphi_y \rangle := \langle x, y \rangle$$

Εφόσον $\varphi : E \to \varphi(E)$ γραμμ. σύνολο; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτ. γινόμ.

Επιπλέον: $\|\varphi_x\| = \sup\{ |\varphi_x(y)| ; y \in E, \ \|y\| = 1 \}$

$$= \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle^{1/2}$$

διότι $\langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|_E^2 = \|\varphi_x\|^2$

Μένει να επεκτείνω το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ από τον
$\varphi(E)$ στον $\mathcal{H} = \overline{\varphi(E)}$

Έστω $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ τότε

$\exists (\varphi_{x_n}), (\varphi_{y_n})$ του $\varphi(E)$ ώστε

$\|\varphi - \varphi_{x_n}\| \to 0$ και $\|\psi - \varphi_{y_n}\| \to 0$

Θέλω να ορίσω

$\langle \varphi, \psi \rangle = \lim_n \langle \varphi_{x_n}, \varphi_{y_n} \rangle$

Πάμε σε δύο βήματα:

(i) $\forall \varphi \in \mathcal{H}$ και $\forall x \in E$ να ορίσω

$\langle \varphi, \varphi_x \rangle \overset{?}{=} \lim \langle \varphi_{x_n}, \varphi_x \rangle$ (*)

$\langle \varphi_{x_n}, \varphi_x \rangle = \langle x_n, x \rangle$

Ισχύει ότι $(x_n)$ είναι βασική ✓

διότι $(\varphi_{x_n})$ συγκλίνει (στο $\varphi$)

άρα $(\varphi_{x_n})$ βασική

οπότε $\|x_n - x_m\| = \|\varphi_{x_n} - \varphi_{x_m}\|$

άρα, $\forall x \in E$, $(\langle x_n, x \rangle)$ βασική στο $\mathbb{C}$

άρα συγκλίνει.

Συνεπώς το όριο στην (*) υπάρχει

Επίσης, αν $(x_n')$ ικανοποιεί $\varphi_{x_n'} \to \varphi$

τότε $\|x_n - x_n'\| = \|\varphi_{x_n} - \varphi_{x_n'}\| \to 0$

άρα η $(x_n')$ επίσης είναι βασική
και $|\langle x_n', x \rangle - \langle x_n, x \rangle| \to 0 \ \forall x$

οπότε το $\langle \varphi, \varphi_x \rangle$ είναι καλά ορισμένο

Τώρα ομοίως ορίζω
$\langle \varphi, \psi \rangle = \lim \langle \varphi, \varphi_{y_n} \rangle$

όπου $(y_n)$ του $E$ με $\|\psi - \varphi_{y_n}\| \to 0$

Τώρα έχω ορίσει $\langle\cdot,\cdot\rangle$ στο $\mathcal{H}$ και
έχω πληρότητα, αφού $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$
(εύκολο) ∎.

Αποδεικνύεται ότι $\forall \varphi : (C([0,1]), \| \|_2) \to \mathbb{C}$

και $\| \|_2$ - συνεχής (!)

αντιγραμμική / είναι της μορφής

$$\varphi(g) = \int_0^1 \overline{g(x)}\, h(x)\, dx$$

στη Θεωρία Μέτρου

$\int$ για Lebesgue

όπου $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\int |h|^2 < +\infty$.

Ορισμός (για μας!)

$L^2([a,b])$ = η πλήρωση του

$$\left( C([a,b]), \| \|_2 \right)$$

Τα στοιχεία του $L^2$ είναι αντικείμενα που προσεγγίζονται από συνεχείς συναρτήσεις ως προς $\| \|_2$

Ερώτηση: Πάρε $t_0 \in [a,b]$ και όρισε

$$\varphi_{t_0}(g) = g(t_0), \quad g \in C([a,b])$$

Προφανώς $\varphi_{t_0}$ γραμμική.

Είναι όμως $\| \|_2$ - συνεχής;

Πράξ. φραγμ. τελεστή.

$\forall a \in \ell^\infty$, ορίσαμε

$$D_a : \ell^2 \to \ell^2$$

$$D_a x = ax \quad \text{δηλ}$$

$$(D_a x)(n) = a(n)x(n) \quad \forall n$$

Να κάνω το αντίστοιχο στον $(C([a,b]), \|\ \|_2)$

Έστω $h \in C([a,b])$, ορίζω

$$M_h^0 : C([a,b]) \to C([a,b])$$
$$f \longmapsto hf$$

(δηλ. $(M_h^0 f)(x) = h(x)f(x) \quad \forall x \in [a,b]$)

Η $M_h^0$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

είναι $\|\ \|_2$-συνεχής;; YES, με καν!

$$\|M_h^0(f)\|_2^2 \overset{?}{\leq} \text{σταθ} \|f\|_2^2$$

$$\hookrightarrow \int |(M_h^0 f)(t)|^2 dt$$

$$= \int |h(t) f(t)|^2 dt$$

όμως h φραγμ. και

$\forall t$, $|h(t)| \leq \|h\|_\infty$

(h: συνεχής σε συμπαγές, άρα φραγμ.!)

όπου $\|h\|_\infty = \sup\{|h(s)| : s \in [a,b]\}$.

$$\leq \|h\|_\infty^2 \int |f(t)|^2 dt$$

$$= \|h\|_\infty^2 \|f\|_2^2$$

δηλ $\forall f \in C([a,b])$,

$$\|M_h^0(f)\|_2 \leq \|h\|_\infty \|f\|_2 .$$

Δηλ. ο τελεστής $M_h^0$ είναι φραγμ.

και μάλιστα $\|M_h^0\| \le \|h\|_\infty$

(μάλιστα ισχύει $=$)

Εξ ορισμού

$(C([a,b]), \|\ \|_2)$ πυκνός στον

$(L^2([a,b]), \|\ \|_2)$

και έχω $M_h^0 : C([a,b]) \to C([a,b])$

$$C([a,b]) \subseteq L^2([a,b])$$

γραμμ. + φραγμ.

άρα $\exists!$ επέκταση $M_h$ του $M_h^0$:

$$M_h : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$$

γραμμ. + φραγμ.,

$$\|M_h\| = \|M_h^0\| \ (= \|h\|_\infty)$$

Ο $M_h$ είναι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής που αντιστοιχεί στην $h \in C([a,b])$.