16 Μαρ

$\mathcal{E}$ ΟΚ βάση: (i) ορθοκανονικό δηλ. $\forall e, f \in \mathcal{E}$ ισχύει

$\langle e, f \rangle = 0$ και $\|e\| = \|f\| = 1$

(ii) $[\mathcal{E}]$ πυκνό στον E

δηλ. $\forall x \in E$ $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{E}$

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

τ.ω.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon$$

$E = (C[0,1] , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ $\quad \langle f,g \rangle = \int_0^1 f\bar{g}$

$F \subseteq E$ $\quad F$: τα πολυώνυμα (γραμμ. υπόχ.)

• $\overline{F} = E$ ως προς τη $\|\cdot\|_2$

Απόδ. Έστω $f \in E$.

Θ. Weierstrass (!.) $\rightarrow \forall \epsilon > 0$ από (W) $\exists p \in F$

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon$$

$$\sup\{ |f(t) - p(t)| : t \in [0,1] \}$$

$$\Rightarrow \|f-p\|_2^2 = \int_0^1 |f-p|^2 \leq \epsilon^2 (1-0)$$

άρα $\|f-p\|_2 < \epsilon$

• Παρατηρώ ότι τα $\{p_n : n = 0, 1, \dots\}$

όπου $p_n(t) = t^n$

αποτελούν αλγεβρ. βάση του F

οπότε, άρα κάνω Gram - Schmidt

βρίσκω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{E}$ ορθοκανονική

ακολ. από πολυώνυμα

που είναι επίσης αλγεβρ. βάση του F

άρα $[\mathcal{E}] = F \Rightarrow \overline{[\mathcal{E}]}^{\|\,\|_2} = \overline{F}^{\|\,\|_2} = E$

βρήκα για ορθ. βάση του E από πολυώνυμα

Γενικά, έστω

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ο.κ. βάση του E, $x, y \in E$:

$$\longrightarrow \quad \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle$$

Απόδ $\rightarrow$: Ξέρω ότι $x = \lim\limits_{N} x_N = \lim\limits_{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$

Αλλά $x \mapsto \langle x, y\rangle$ συνεχής, άρα $\Downarrow$

$$\langle x, y\rangle = \lim_{N} \langle x_N, y\rangle$$

$$\langle x, y\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n , y \right\rangle$$

|| γραμμ

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle \langle e_n, y\rangle. \quad \blacksquare$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \quad (\text{Parseval})$$

$$\Downarrow$$

η ακολουθία (a_n) όπου $a_n = \langle x, e_n\rangle$

είναι $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$

δηλ. $(a_n) \in \ell^2$

οπότε έχω:

$$E \longrightarrow \ell^2$$

$$U : x \longmapsto (a_n) \quad \text{με} \quad \sum |a_n|^2 = \|x\|^2$$

άρα ισομετρία.

Είναι και γραμμική;

$$U(x+\lambda y) = \left(\langle x+\lambda y, e_n\rangle\right)_n$$

άρα $\langle x+\lambda y, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle + \lambda \langle y, e_n\rangle$

$$= \left(\langle x, e_n\rangle\right)_n + \lambda\left(\langle y, e_n\rangle\right)_n$$

$$= U(x) + \lambda U(y)$$

Επί;;;;;; όοοοχι

εκτός ίσως αν ο E

είναι και αυτός πλήρης.

Τι γίνεται: $U: E \longrightarrow \ell^2$

$x \longrightarrow (\langle x, e_n\rangle)$

όταν ο E χώρος Hilbert;

$\exists$? $(a_n) \in \ell^2$ που να μην είναι εικόνα κάποιου $x \in \ell^2$;

Όμως! $\forall n$, αν $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, τότε βεβαίως $x_n \in E$

και $U(x_n) = (a_1, a_2, \dots a_n, 0, 0, \dots)$

διότι: $\langle x_n, e_k\rangle = \begin{cases} a_k, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$.

Ισχυρ. ότι η (x_n) είναι συγκλίνουσα στο E

Οπότε,

Αν $x = \lim_n x_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$

τότε $U(x) = (a_n)$ και έχω τελειώσει

Αποδ. ΝΑΙ, διότι είναι βασική και ο E πλήρης:

Πράγματι, αν $m > n$,

$$\|x_m - x_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k e_k \right\|^2$$

$$\overset{(\text{Πυθ.})}{=} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2$$

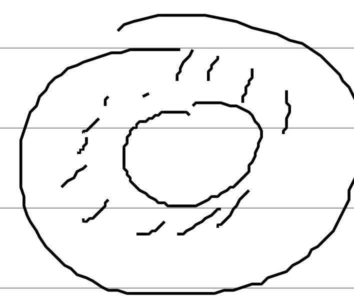
Α)) $(a_n) \in \ell^2$, $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 :$
$\forall m > n \geq n_0$

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2 < \epsilon$$

$\blacksquare$

<u>Παράδ</u> $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό (πχ. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

<u>πχ</u>



Ο χώρος:

$$A^2(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \text{ ολόμορφη και } \iint_G |f(x+iy)|^2 \, dx\,dy < +\infty \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert
(Bergman space)

Πότε μια ΟΚ βάση του E είναι αλγεβρ. βάση

- όταν $\dim E < +\infty$: φυσικά.

- όταν $\dim E = +\infty$;

  παράδ $E = c_{00} = [e_k : k \in \mathbb{N}]$

  $$e_k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, \dots)$$

  η $\{e_k\}$ είναι ο κ βάση

  $\neq$ αλγεβρ βάση του c_{00}

  Όμως ο c_{00} όχι πλήρης

- Όταν $\dim E = +\infty$ και E Hilbert, μια ΟΚ βάση ποτέ δεν είναι αλγεβρ βάση

δηλ

Αν $\mathcal{E} \subseteq E$ είναι μια άπειρη ο.κ. οικογένεια, τότε $\exists\, x \in E \setminus [\mathcal{E}]$

δηλ $[\mathcal{E}] \neq E$

Απόδ $\mathcal{E}$ άπειρο: $\exists \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{E}$ άπειρη ακολουθία

Ορίζω $x = \sum^{\infty} \frac{1}{n} x_n$

- η σειρά συγκλίνει διότι είναι βασική:

$$\Big\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \quad \text{κ.λπ.}$$

<u>Ισχυρ.</u> $x \notin [E]$

<u>Απόδ.</u> Έστω ότι $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{K}$ και $y_1, y_2 \dots y_m \in E$

(γράφω $E = \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{y_j : j \in J\}$)

ώστε $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = 0$

όμως, αφού E είναι ΟΚ: $\langle x_n, x_1 \rangle = 0 \ \forall n > 1$ και $\langle y_j, x_1 \rangle = 0 \ \forall j \in J$

άρα

$$0 = \left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j \right), x_1 \right\rangle = 1$$ <u>άτοπο</u>

Άλλος ένας χώρος Hilbert:

$$H^2 = \text{Hardy} = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \text{ όπου } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

$\Downarrow$

η ακτίνα σύγκλισης
η ΑΣ είναι ≥ 1
οπότε η σειρά
συγκλίνει τουλάχιστον
$\forall\, |z| < 1$

$\Downarrow$

κάθε $f \in H^2$ ορίζει μια
συνάρτηση ολόμορφη στον $\mathbb{D}$

Η απεικ.: $H^2 \longrightarrow \ell^2$

$f \longmapsto (a_n)$ προφανώς γραμμική
1-1, επί

μπορώ να ορίσω

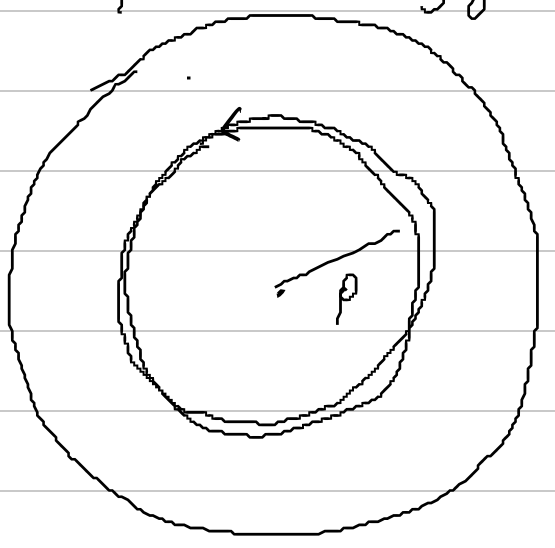
$$\|f\|_H := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$$

οπότε ο $(H^2, \|\ \|_H)$ είναι Hilbert

διότι ισομ. ισομορφ.(*) με τον ℓ^2

αποδεικνύεται ότι $\|f\|^2 = \sup\limits_{0 \leq \rho < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt$

$$\sup_{\rho < 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt \right\} = \|f\|^2$$



(*): ισομ-ισομ:
ισομετρικά
ισόμορφος
δηλ. και ως μετρικός χώρος
και ως γραμμ. χώρος

Τελεστές:

Έστω $T:(E,\|\;\|_E) \longrightarrow (F,\|\;\|_F)$ γραμμική.

αν $\exists\, x_0 \in E$ τ.ω. T συνεχής στο x_0

$$\Downarrow$$

Αν (x_n) είναι ακολ. που $x_n \longrightarrow 0$

τότε $x_n + x_0 \longrightarrow x_0$

$\Downarrow$ υποθ

$$T(x_n + x_0) \longrightarrow T(\cancel{x_0})$$

$$\|$$

$$T(x_n) + \cancel{T(x_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$T(x_n) \longrightarrow 0 = T(0)$$

άρα T συνεχής στο 0

$$\Updownarrow$$

$\exists\, M$ τω $\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x \in E$

<u>Απόδ</u> Αν όχι, $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_N \in E$ τω

$$\|Tx_N\| > N\|x_N\|$$

Θέτω $y_N = \dfrac{x_N}{N\|x_N\|}$

$$\|y_N\| = \frac{1}{N} \longrightarrow 0$$

ενώ $T(y_N) = \dfrac{T(x_N)}{N\|x_N\|}$

$$\|T(y_N)\| > 1 \qquad \forall N$$

άρα T δεν είναι συνεχής στο 0

Παρ/γ. $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, $x \in E \setminus \{0\}$:

$$f_x : E \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{χώρος με } \| \ \|$$
$$y \longmapsto \langle y, x \rangle \qquad\qquad | \ |$$

γραμμική και επίσης

$$|f_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \overset{CS}{\leq} \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\|f_x\| = \inf\{k > 0 : |f_x(y)| \leq k\|y\| \ \forall y \in E\}$$

άρα $\|f_x\| \leq \|x\|$: f_x είναι φρ.

Μπορώ να βρω ακριβώς την $\|f_x\|$:

αν $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ τότε $\|y\| = 1$

και $f_x(y) = \dfrac{\langle x, x \rangle}{\|x\|} = \|x\|$

όμως $\|f_x\| = \sup\{ |f_x(y)| : \|y\| \leq 1 \} \geq \|x\|$

τελικώς $\|f_x\| = \|x\|$

Προβλ. Διαγώνιοι τελεστές;

$$E = (\ell^2, \|\ \|_2)$$

Μου δίνουν μια $a = (a(n))$, $a(n) \in \mathbb{C}$

και ορίζω: όταν $x = (x(n)) \in \ell^2$

$$D_a\big((x(1), x(2), x(3), \dots)\big)$$

$$\|$$

$$(a(1)x(1), a(2)x(2), a(3)x(3), \dots)$$

ειδικότερα: $D_a(e_n) = a(n)e_n \ \forall n$

ισχύει ότι $\forall x \in \ell^2$ έχω $D_a(x) \in \ell^2$;;

εν γένει όχι π.χ. αν $a(n) = n \ \forall n$,

τότε αν $x = \left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^2$

έχω $D_a(x) = (1, 1, 1, \dots) \notin \ell^2$

1) Ποιός είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος του ℓ^2 που μένει αναλλοίωτος από <u>όλες</u> τις D_a ;

2) Ποιές ακολουθίες a έχουν την ιδιότητα

$$D_a(\ell^2) \subseteq \ell^2 \;;;$$