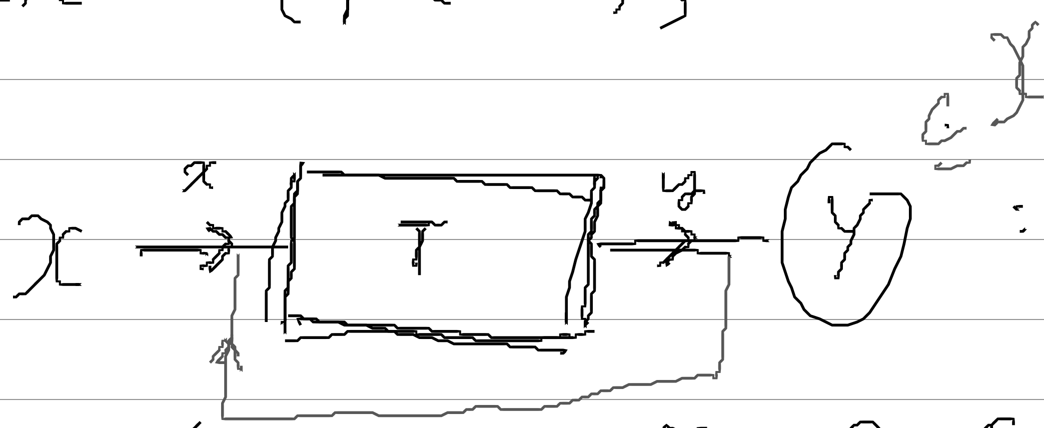
Καλημέρα σε όλους!

Σήμερα είναι Πέμπτη, 26 Φεβρουαρίου 2015
και ξεκινάμε το μάθημα

«712: Γραμμικοί Τελεστές»

Τι είναι Τελεστής (Operator);



: $y = T(x)$ γράφω: $= Tx$

Γραμμικός $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$x_1 + \lambda x_2 \xrightarrow{T} y_1 + \lambda y_2$

σημαίνει 2 πράγματα: (i) $\mathcal{X}$: γραμμικός χώρος

(ii) αρχή της υπέρθεσης: $\overset{T}{\text{γραμμική}}$ απεικόνιση

Παράδειγμα $T: f \longmapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$

a_i: «καλές» συναρτήσεις ; f': παράγωγος

Διαφ. Εξισώσεις: $a_1 f + a_2 f' + a_3 f'' = g$

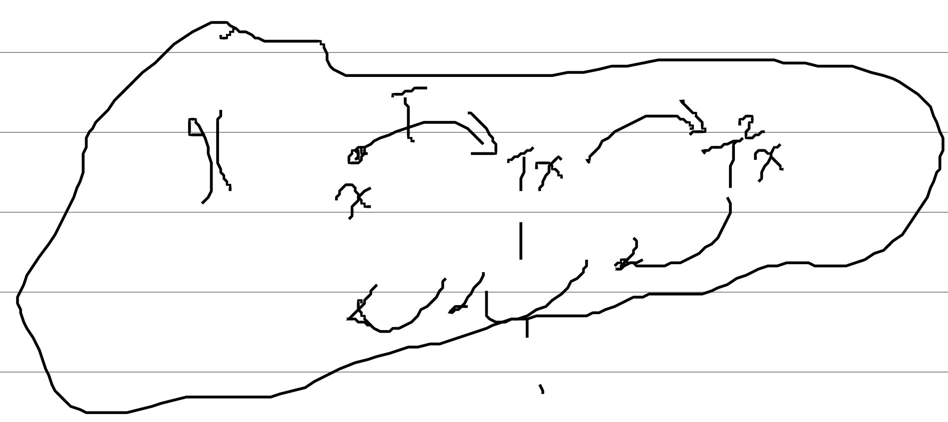
$T(f) = g$

Δίνεται g ; βρες f ώστε $T(f) = g$

$\{f \in \mathcal{X} : T(f) = g\} = T^{-1}(\{g\})$

π.χ. $\mathcal{X}$ ο χώρος $C^2(\mathbb{R})$ = συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
με 2η παράγωγο συνεχή
όπου θέλω ο $\mathcal{Y}$ να αποτελείται από συνεχείς

π.χ. $\mathcal{X} = C^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{Y}$: απεριόριστα παραγωγίσιμες
τώρα έχει νόημα να θεωρήσω:
$x_n = T^{(n)}(x)$



(γραμμικό δυναμικό σύστημα;
«χαοτικοί» τελεστές κ.λπ.)

ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΟΥ ΘΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥΜΕ;

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$: E γραμμικός χώρος : μιγαδικός

$\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{C}$

$x_1, x_2, y \in E$

εσωτ. γιν.

ημι-εσωτ. γιν.

(1) $\langle x_1+\lambda x_2, y\rangle = \langle x_1,y\rangle + \lambda\langle x_2,y\rangle$ $\quad \lambda\in\mathbb{C}$

(2) $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$

(3) $\langle x,x\rangle \geq 0$

(4) $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

1ο Παράδ. $\mathbb{C}$: $\langle z,w\rangle = z\bar{w}$, $\quad \langle z,z\rangle = z\bar{z} = |z|^2$

όπου $z = x+iy \quad (x,y\in\mathbb{R})$
$\bar{z} = x-iy$
$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

2ο Παράδ. $\mathbb{C}^n = \{(z_1,z_2,\dots,z_n) : z_i\in\mathbb{C}\}$

$$\langle z,w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k \ : \ \langle z,z\rangle = \sum |z_k|^2$$

3ο Παράδ. "απειροδιάστατο" μιγ. αρ. θέλω:

$$\langle z,w\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} z_k\bar{w}_k .$$ Τι εννοείς;

με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^2 < +\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 = \sup_n \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 .$$

για αυτό ορίζω: $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}) = \{(z(n)) \ z(n)\in\mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty}|z(n)|^2 < +\infty\}$

πρέπει νδο (i) ℓ^2 είναι γραμμ. χώρος
(ii) $\forall z,w\in\ell^2$ τότε
$\sum z_k\bar{w}_k$ συγκλίνει στο $\mathbb{C}$

4ο Παρ/γ $\quad X = C([a,b]) = \{ f : \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ f \text{ συνεχής} \}$

$\left(\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar z}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar z}{2i} \right)$

δηλ. Ref, Imf συνεχείς

$$\cancel{\langle f,g\rangle = \text{``}\sum_{t\in[a,b]}\text{''}} \ f(t)\overline{g(t)}\text{''}$$

τι νόημα έχει ;;;

νέα προσπάθεια!

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

καλά ορισμένο διότι $t \longmapsto f(t)\overline{g(t)}$ συνεχής, άρα ∫σιμη.

Ξέρω ότι το ∫μα γραμμικό!!

άρα: $\langle f_1+\lambda f_2, g\rangle = \int (f_1+\lambda f_2)\bar g = \int f_1 \bar g + \lambda \int f_2 \bar g$

$= \langle f_1,g\rangle + \lambda\langle f_2,g\rangle$

$\langle f,f\rangle = \int f\bar f = \int |f|^2 \geq 0$ διότι το ∫μα διατηρεί την $\geq$

$\langle f,f\rangle = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f = 0$

$\Updownarrow$

$$\int_a^b \underbrace{|f(t)|^2}_{g(t)}\,dt = 0$$

$g(t) \geq 0$ και συνεχής και $\int g = 0$

$\Downarrow$

$g(t) = 0 \ \forall\, t\in[a,b]$

διότι αν $\exists\, t_0\in[a,b]$; $g(t_0)>0$

τότε, λόγω συνέχειας (!) της g

θα $\exists$ μια $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ όπου $g(t) \geq \frac{g(t_0)}{2}$

οπότε $\int_a^b g(t)\,dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(t)\,dt \geq \frac{g(t_0)}{2}\,2\delta > 0$ ∎

ΟΚ, τώρα ανάλυση:

- Ο χώρος $(\ell^2, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος ως προς: $d(z,w) = \langle z-w, z-w \rangle$ (απόδ?)

  και είναι ΠΛΗΡΗΣ στην μετρ. d

  (δηλ. κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει)

- Ο χώρος $(C([a,b]), \langle \cdot , \cdot \rangle)$

  γίνεται μ.χ. με

$$\|f-g\|_2^2 = \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt = \langle f-g, f-g \rangle$$

Όμως, <u>δεν</u> είναι πλήρης!

ΤΙ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ;;

$\Downarrow$

ΠΑΜΕ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΩΣΗ.
(δες αργότερα)

<u>Σημ.</u> Ξέρω ότι ο $(C([a,b]), \| \ \|_\infty)$ (όπου $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$) είναι πλήρης. Όμως η $\| \ \|_\infty$ δεν προέρχεται από $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
Οπότε δεν έχουμε τα "γεωμετρικά" εργαλεία – καθετότητα κ.λπ.
(δες αργότερα)