30 Απριλίου

Συμπαγείς Τελεστές

$T : E \longrightarrow F$ χώροι Banach, T γραμμ.

<u>Ορ</u> • T πεπερ. <u>τάξης</u> (rank) αν

$$\operatorname{im}T \subseteq F$$

έχει πεπερ. διάσταση

• πρώτης τάξης : $\operatorname{im}T = [y]$

$$\exists\, x_0 \in E \;:\; \forall\, y \in \operatorname{im}T \;:\; y = \lambda T x_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

<u>Παρ</u> Σταθεροποιώ $x_0 \in E$

$$\forall\, x \in E, \quad Tx \in [Tx_0]$$

άρα $\exists\, \lambda_x \in \mathbb{C}$:

$$Tx = \lambda_x T x_0 = \lambda_x y_0$$

T γραμμ $\Rightarrow$ $E \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto \lambda_x$ γραμμ.

όμως $x \longmapsto \lambda_x$ όχι αναγκαστικά συνεχής!

Ασχολούμαστε <u>μόνο</u> με <u>συνεχείς</u> και γραμμ.

Ορισμός $F(E,F) = \{ T : E \to F$ γραμμ. + συνεχείς και $\dim(\operatorname{im} T) < +\infty \}$.

Ειδικότερα, όταν $\operatorname{im} T$ μονοδιάστατος:

$$Tx = \lambda(x) y_0$$ όπου $\lambda : E \to \mathbb{C}$ γραμμ. + συνεχής

Περιορίζομαι στην περίπτωση $E =$ Hilbert οπότε $\lambda(x) = \langle x, x_0 \rangle$ για κάποιο $x_0 \in E$ (Riesz)

τότε: $T : x \longmapsto \lambda(x) y_0 = \langle x, x_0 \rangle y_0$

Επομ. $\forall$ γραμμ. τελεστής $1^{ης}$ τάξης σε χώρο Hilbert είναι της μορφής:

$$T(x) = \langle x, x_0 \rangle y_0$$
όπου $y_0 \in F$, $x_0 \in E$

Συμβολισμός: $T = y_0 \otimes x_0^*$

δηλ: $T(x) = (y_0 \otimes x_0^*)(x)$

$= y_0 \langle x, x_0 \rangle$

Άλλοι συμβολισμοί: άλλοι $x_0 \otimes y_0$

άλλοι $y_0 \otimes x_0$

άλλοι θ_{x_0, y_0}

Γενικότερα, κάθε $T \in F(H, K)$
(χώροι Hilbert)

είναι της μορφής:

$$T = \sum_{k=1}^{n} y_k \otimes x_k^*, \quad x_k \in H, \ y_k \in K$$

δηλ:

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle y_k \quad \forall x \in H$$

Τοπολογική Ιδιότητα:

Έστω: $\hat{B}_H = \{ x \in H : \|x\| \leq 1 \}$

Τότε: $T(\hat{B}_H)$ φραγμ. $\subseteq \underbrace{\mathrm{im}\,T}_{\substack{\text{πεπερ. διάστασης} \\ \cong \mathbb{C}^n}} \subseteq K$

άρα $\overline{T(\hat{B}_H)}$ κλ + φραγμ. $\subseteq \mathrm{im}\,T$

γιατί $\overline{T(\hat{B}_H)} \subseteq \mathrm{im}\,T$;;

διότι $\mathrm{im}\,T$ κλειστός υποχ. του K
(γιατί;;)

Αυτό δεν ισχύει $\forall\, T$!!

<u>Παρ/γ</u> $H = K = \ell^2$, $T(x) = D_a x$

όπου $a(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n$

Ξέρω ότι φραγμ. τελεστής

αλλά το $\mathrm{im}T$ <u>δεν</u> είναι κλειστό

διότι: περιέχει κάθε e_n

αφού: $e_n = n \frac{1}{n} e_n$

$= \frac{1}{n} D_a(e_n)$

$= D_a\left(\frac{1}{n} e_n\right) \in \mathrm{im} D_a$

άρα: $\mathrm{im}T \supseteq [e_n : n \in \mathbb{N}] = c_{00}$

άρα, αν $\mathrm{im}T$ ήταν κλειστό, θα ήταν $= \ell^2$

Ισχυρίζομαι όμως ότι

το $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \notin \mathrm{im}T$

γιατί αν $\exists y \in \ell^2$ με $x = Ty$

θα έπρεπε $\underbrace{x(n)}_{= 1/n} = \frac{1}{n} y(n)$ $\forall n$

θα έπρεπε $y(n) = 1$ $\forall n$

<u>άτοπο</u>

αφού $y \notin \ell^2$

Όμως, $\forall\, T \in \mathcal{F}(H, K)$ έχει $\operatorname{im} T$ κλειστό.

Απόδ: $\operatorname{im} T \subseteq K$ ← Hilbert

υπόχ, πεπερ. διάστασης

↓

άρα πλήρης

↓

άρα κλειστός $\subseteq K$ $\blacksquare$

Συμπέρασμα: αν $T \in \mathcal{F}(H, K)$ τότε

$$\overline{T(\hat{B}_E)} \subseteq \operatorname{im} T$$

κλειστό + φραγμ. ↑ ↑ πεπερ διάστασης

άρα συμπαγές

Ορισμός Ένας $T : E \to F$ γραμμ. λέγεται συμπαγής αν $\overline{T(B_E)} \subseteq F$ συμπαγές

Πρόταση T συμπαγής $\Rightarrow$ T φραγμ.

Αν F έχει πεπερ. διάσταση κάθε $T \in \mathcal{B}(E, F)$ έχει (αναγκαστικά) πεπερ. τάξη.

Το ίδιο αν E έχει πεπερ. διάσταση.

Αν E, F απειροδιάστατοι:

$$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) = \{\text{οι συμπαγείς } E \to F\} \subseteq \mathcal{B}(E,F)$$

$\neq$ $\neq$

παράδ. D_a όπου $a(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n$

δεν είναι πεπερ. τάξης γιατί

$$\operatorname{im}(D_a) \supseteq [e_n : n \in \mathbb{N}]$$

νδο συμπαγής

δηλ. νδο: $\overline{\{D_a(x) : \|x\|_2 \leq 1\}}$ συμπαγής

παρατ: $B_{\ell^2} = \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$

κλ + φραγμ, όχι συμπαγές

πχ $\{e_n\}$ δεν έχει συγκλιν. υπακ.

διότι $n \neq m$; $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$

[Όμως παρατ. ότι $\left(D_a(e_n)\right)$ συγκλίνει σε 0

$$\left(\frac{1}{n} e_n\right)$$

$\|\frac{1}{n} e_n - 0\|_2 = \frac{1}{n} \to 0$]

Τι πρέπει να δείξω; Ότι
$\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στη $\hat{B}_{\ell^2}$

δηλ. $\forall \|x_k\|_2 \le 1$

δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_k(n)|^2 \le 1$

νδο ότι η ακολουθία $(D_a(x_k))_{k=1}^{\infty}$ έχει συγκλ. υπακ.

Παρατ: $D_a(x_k) = (x_k(1), \frac{1}{2}x_k(2), \frac{1}{3}x_k(3), \dots)$, $k\in\mathbb{N}$

Άλλη
Μέθοδος απόδειξης ότι D_a συμπαγής:

$\forall k \in \mathbb{N}$, ονομάζω D_k τον τελεστή:

$D_k(x) = (x(1), \frac{1}{2}x(2), \dots, \frac{1}{k}x(k), 0, 0, \dots)$

Ο D_k έχει τάξη k και είναι συνεχής

άρα $D_k \in \mathcal{F}(\ell^2) \subseteq \mathcal{K}(\ell^2)$

Ισχ $\|D_a - D_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

διότι: $\forall x \in \ell^2$,

$(D_a - D_k)(x) = (0, 0, \dots \underset{k}{0}, \frac{1}{k+1}x(k+1), \dots)$

$\|(D_a - D_k)x\|_2^2 = \sum_{n>k} \left|\frac{1}{n}x(n)\right|^2 \le \frac{1}{(k+1)^2}\sum_{n>k}|x(n)|^2$

$\|(D_a - D_k)x\|_2^2 \le \frac{1}{(k+1)^2}\|x\|_2^2$

sup ως προς $x : \|x\|_2 \le 1$

$\Rightarrow$

$\|D_a - D_k\| \le \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0$

άρα $D_a \in \overline{\mathcal{F}(\ell^2)}^{\|\ \|} \overset{?}{\subseteq} \mathcal{K}(\ell^2)$

γιατί;

Νδο αν $T_n \in \mathcal{K}(E,F)$

και $\|T_n - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

τότε $T \in \mathcal{K}(E,F)$

Συμπέρασμα ! Δεν είναι συμπαγής για $a(n) = \frac{1}{n}$.

$\mathcal{K}(H,K) \subseteq \mathcal{B}(H,K)$

$\neq$ όταν $\dim H = +\infty$
$\dim K = +\infty$

<u>πχ</u> $I : \ell^2 \to \ell^2$

όχι συμπ.

διότι $I(\hat{B}_{\ell^2}) = \hat{B}_{\ell^2}$ όχι συμπ.

<u>πχ</u> T : $T(e_{2n}) = e_{2n}$, $T(e_{2n-1}) = 0$

δηλ: $T = \underset{\text{προβολή}}{P}\left(\overline{[e_{2n} : n \in \mathbb{N}]}\right)$

φραγμ, $\|T\| = 1$

αλλά όχι συμπαγής, διότι η (e_{2n})
ανήκει στο $T(\hat{B}_{\ell^2})$

και <u>δεν</u> έχει συγκλ. υπακ.

$$T = D_a, \quad a(n) = \begin{cases} 1, & n \in 2\mathbb{N} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όχι συμπαγής.

ενώ D_a με $a(n) = \frac{1}{n}$: <u>συμπ</u>.

πότε ένας D_a είναι συμπ ;;

$\mathcal{F}(H,K) \subseteq \mathcal{K}(H,K) \subseteq \mathcal{B}(H,K)$

$\neq$ $\neq$

σω, ΑΣΑ ιδ)ω ... σuμπ ... φραγμ

(α) $T, S \in \mathcal{F}(H,K) \Rightarrow T+\lambda S \in \mathcal{F}(H,K)$

(β) $T \in \mathcal{F}(H)$, $S \in \mathcal{B}(H)$

$\Rightarrow TS \in \mathcal{F}(H)$

διοτι $\operatorname{im}(TS) \subseteq \operatorname{im}(T)$

επίσης $\Rightarrow ST \in \mathcal{F}(H)$

διοτι αν $\operatorname{rank} T = n$

τοτε $\exists\, x_1, \ldots, x_n \in H$

τ.ω $\{Tx_1, \ldots, Tx_n\}$ παράγει τον $\operatorname{im} T$

οπότε $\{STx_1, \ldots, STx_n\}$

παράγει τον $\operatorname{im}(ST)$

$\dim(\operatorname{im}(ST)) \leq \dim(\operatorname{im}(T)) < +\infty$

$\therefore$ $\mathcal{F}(H)$ ειναι (αμφίπλευρο) ιδεώδες στον $\mathcal{B}(H)$

$\mathcal{K}(H,K)$ γραμμ. χώρος ;;

$T, S : H \to K$ συμπ., $\lambda \in \mathbb{C}$

νδο $T+\lambda S$ είναι συμπαγής

δηλ. ότι

$\overline{(T+\lambda S)(\hat{B}_H)} \subseteq K$ συμπ.

ισοδύναμα, νδο $\forall y_n \in (T+\lambda S)(\hat{B}_H)$

η (y_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

δηλ. αρκεί νδο $\forall (x_n)$ στη $\hat{B}_H$,

η $((T+\lambda S)x_n)$ έχει συγκλ. υπακ.

όμως, T συμπ. άρα $T(x_n)$ έχει συγκλ. υπακ.

έστω $T(x_{k_n})$

κοιτάω την ακολουθία $((T+\lambda S)x_{k_n})_n$

παρατηρώ ότι η $(S(x_{k_n}))$ έχει συγκλ. υπακ.

(διότι S συμπαγής), έστω:

$S(x_{k_{m_n}})$

οπότε η $((T+\lambda S)(x_{k_{m_n}}))$

$$= T(x_{k_{m_n}}) + \lambda S(x_{k_{m_n}}) \quad ; \text{ συγκλ.}$$

συγκλ. συγκλ.

$T, S : H \to H$ και

(β) T συμπ, S φραγμ $\Longrightarrow$ ST συμπ

<u>αποδ</u>: $T(\hat{B}_H)$ σχετ συμπ.

$\Downarrow$ S συνεχής

$S(T(\hat{B}_H))$ σχετ. συμπ. ∎

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ TS συμπ?

$S(\hat{B}_H)$ φραγμ. (διότι S φραγμ)

άρα $\exists\ \hat{B}(0,\rho)$ του H

ώστε $S(\hat{B}_H) \subseteq \hat{B}(0,\rho)$

$$\hat{B}(0,\rho) = \rho \hat{B}_H$$

άρα

$$T(S(\hat{B}_H)) \subseteq \underbrace{T(\rho\hat{B}_H) = \rho \underbrace{T(\hat{B}_H)}_{\text{σχετ. συμπ.}}}_{\text{σχετ. συμπ.}}$$

<u>συμπερ</u> $\mathcal{K}(H)$

είναι αμφίπλευρο ιδεώδες

του $\mathcal{B}(H)$.

Όμως, το $F(H)$ <u>όχι</u> κλειστό ✓

ενώ $\mathcal{K}(H,K)$ <u>είναι</u> κλειστό $\subseteq \mathcal{B}(H,K)$

άρα χώρος <u>Banach</u>

<u>Αποδ.</u> Έστω (T_n) $T_n \in \mathcal{K}(H,K)$

και $T \in \mathcal{B}(H,K)$: $\|T_n - T\| \to 0$

<u>νδο</u> T συμπαγής

Θέλω νδο $T(B_H)$ είναι σχετ. συμπαγές ισοδ. ολικά φραγμ. (γιατί;)

Μου δίνουν $\epsilon > 0$ πρέπει να βρω

μπάλες $B(y_i, \epsilon)$, $i = 1 \dots n$ που να καλύπτουν την $T(B_H)$

Έχω: $\|T_n - T\| \to 0$

άρα $\exists k \in \mathbb{N}$: $\|T_k - T\| < \epsilon/3$

Όμως T_k συμπαγής, άρα για το $\epsilon > 0$

βρίσκω $B(y_i, \epsilon/3)$, $i = 1, \dots, n$

που καλύπτουν το $T_u(\hat{B}_H)$

δηλ $\forall x \in \hat{B}_H \quad T_u x \in \hat{B}(y_i, \epsilon/3)$ για κάποιο $i = 1 \dots n$

δηλ $\exists i = 1 \dots n$:

$$\|T_u x - y_i\| < \epsilon/3$$

οπότε

$$\|Tx - y_i\| \leq \|Tx - T_u x\| + \|T_u x - y_i\|$$

$$< \|T - T_u\| \|x\| + \epsilon/3 < \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

άρα οι $\hat{B}(y_i, \epsilon)$, $i = 1 \dots n$

καλύπτουν το $T(\hat{B}_H)$

Παρ. Δεν αρκεί να ισχύει (T_n συμπαγείς και)

$$\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0 \quad \forall x \in H$$

για να είναι ο T συμπαγής.

Πχ ο $I : \ell^2 \to \ell^2$ δεν είναι συμπ.,

Είναι όμως κ.σ. όριο ακολουθίας τελεστών πεπερ. τάξης!

Έστω: $P_n = P([e_1 \dots e_n])$: $\operatorname{rank} P_n = n$ άρα συμπαγής

και $\forall x \in \ell^2$, $\|P_n x - x\|_2 \longrightarrow 0$

διότι $\|x - P_n x\|_2^2 =$

$$\|(0, 0, \dots, \underset{n}{0}, x(n+1), x(n+2), \dots)\|^2$$

$$= \sum_{k>n} |x(k)|^2 \longrightarrow 0$$

αφού $(x(n)) \in \ell^2$.

Παρδγ $\int$ και τελεστές:

$$H = L^2([0,1])$$

$$k \in C([0,1]^2)$$

ορίζω A_k:

$$(A_k f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\,dy$$

Έχω δείξει $\|A_k f\|_2^2 \le \|k\|_{22}^2 \, \|f\|_2^2 \quad \forall f$

όπου $\|k\|_{22}^2 = \iint |k(x,y)|^2 \, dx\,dy$

οπότε A_k <u>είναι</u> φραγμένος

και $\|A_k\| \le \|k\|_{22}$

$\int$κι εξίσωση $1^{\underline{o}}$ είδους (νομίζω)

$A_k f = g$ να λυθεί ως προς f

Βρες το A_k^{-1} αν υπάρχει

αν ναι για συναρτήσεις είχαμε πληρ. ανάλυση!

$A_k f = g$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(i,j) f(j) = g(i)$$

να λυθεί ως προς $f(j)$

Ξέρουμε (γραμμ. άλγ.) ότι:

ή υπάρχει μοναδική λύση

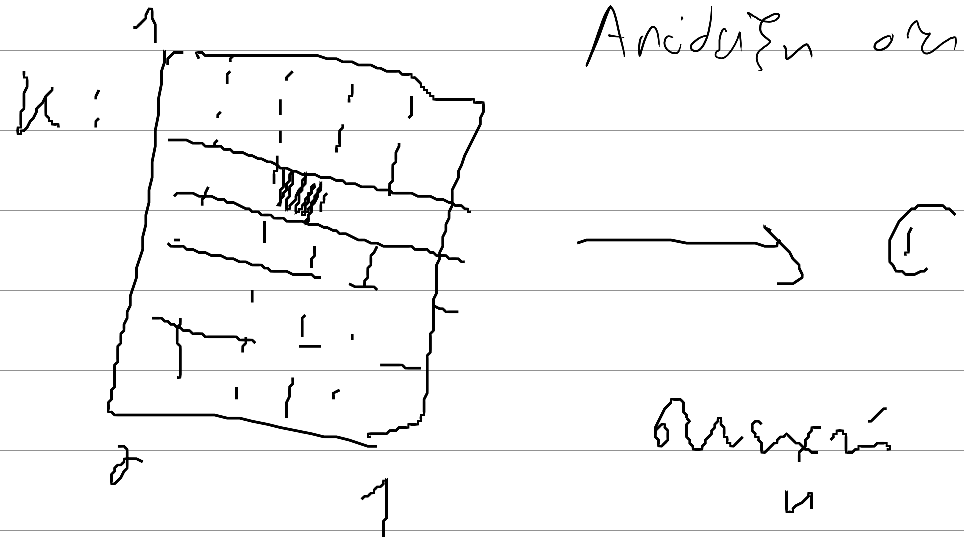
ή η αντίστοιχη ομογενής

$A_k f = 0$

έχει πεπερ. πλήθος γραμμ.

ανεξάρτητων λύσεων κ.λπ.

Απόδειξη ότι A_k συμπαγής:



$\forall \varepsilon > 0$ μπορώ $[0,1]^2 = \bigcup_{k=1}^{n} E_i \times F_i$ ξένα ανά δύο

τω $k|_{E_i \times F_i}$ να μην παίζει πάνω από ε

διαλέγω $(x_i, y_i) \in E_i \times F_i$ και

$$\forall (x,y) \in E_i \times F_i : |k(x,y) - \underbrace{k(x_i, y_i)}_{= k_i}| < \varepsilon$$

Ορίζω

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} k_i \chi_{E_i \times F_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i \chi_{E_i}(x) \chi_{F_i}(y)$$

$$|k(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|k - f\|_2 \leq \varepsilon 1^2$$

άρα $\|A_k - A_f\| \leq \varepsilon$

Όμως:

$$f(x,y) = \sum k_i \chi_{E_i}(x)\chi_{F_i}(y)$$

οπότε

$$(A_f g)(x) = \int_0^1 f(x,y)\, g(y)\, dy$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i \int \chi_{E_i}(x)\chi_{F_i}(y) g(y)\, dy$$

$$\Downarrow$$

$$= \sum k_i \chi_{E_i}(x) \underbrace{\int \chi_{F_i}(y) g(y)\, dy}_{= \langle g, \chi_{F_i}\rangle}$$

άρα

$$A_f g = \sum k_i \langle g, \chi_{F_i}\rangle \chi_{E_i}$$

$$\underbrace{\operatorname{im} A_f \subseteq [\chi_{E_1}, \dots, \chi_{E_n}]}_{\text{πεπερ. τάξης}}$$

Έδειξα ότι ο A_k είναι $\| \ \|$-όριο τελεστών πεπερ. τάξης, άρα συμπαγής

(δες και το αρχείο hscompn.pdf στην e-class)