$T \in B(H)$:

$T^* = T$: $\forall x \in H$:

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$$

$$\Downarrow \quad \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$$

αντίστροφα, υποθ: $\forall x \in H$, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$,
νδο $T = T^*$ δηλ

$$\forall x, y \in H \quad \langle Tx, y\rangle \overset{?}{=} \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle}$$

Απλό όταν $x = y$:

$$\langle Tx, x\rangle \overset{?}{=} \langle x, Tx\rangle$$

όμως, $\langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$ $\in \mathbb{R}$ (υποθ)

άρα $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$

Γενικά: $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ νδο $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ ←

ξέρω: $4\varphi(x,y) = \overbrace{\varphi(x+y, x+y)}^{\in \mathbb{R}} - \overbrace{\varphi(x-y, x-y)}^{\in \mathbb{R}}$
$+ i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)$

$$4\mathrm{Re}\,\varphi(x,y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y)$$

άρα $\overline{\varphi(y,x)} = \varphi(x,y)$

$$\langle Tx, y\rangle - \langle x, Ty\rangle = 0 \quad \forall x, y$$

$$\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle - \langle x, Ty\rangle$$ sesqui + φορμ

Ξέρω: ότι $\varphi(x,x) = 0 \quad \forall x$

$$\Downarrow$$

$$4\varphi(x,y) = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(x+y, x+y)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\varphi(x-y, x-y)}} + i\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(x+iy, x+iy)}} - i\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(x-iy, x-iy)}} = 0$$

$$T = T^* \Rightarrow \|T\| = \sup\{ |\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1 \}$$

Ξέρω γενικά

$$\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = 1 = \|y\| \}$$

άρα αν $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$$

$$a := \sup\{ |\hat{\varphi}(x)| : \|x\| = 1 \} \le \|T\|$$

$= ?$

$\forall x,\ |\hat{\varphi}(x)| \le a\|x\|^2$

Αρκεί, $\forall x, y \in H$ με $\|x\| = 1 = \|y\|$ νδο

$$|\varphi(x,y)| \le a \Rightarrow \|T\| \le a$$

όπως πριν, $4\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,y) = \hat{\varphi}(x+y) - \hat{\varphi}(x-y)$

άρα $|4\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \le |\hat{\varphi}(x+y)| + |\hat{\varphi}(x-y)|$

$$\le a\|x+y\|^2 + a\|x-y\|^2$$

κανόνας $\#$: $= a(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) = 4a$

$$\left.\begin{array}{l} |\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \le a \\ |\mathrm{Im}\,\varphi(x,y)| \le a \end{array}\right\} \Rightarrow |\varphi(x,y)|^2 \le 2a$$

$$\Downarrow$$

$$|\varphi(x,y)| \le \sqrt{2}\,a$$

ΟΧ!!

2η προσπάθεια:

$\varphi(x,y) = \lambda|\varphi(x,y)|$ $\quad (\forall z = \lambda|z|$ όπου $|\lambda| = 1)$

$$\Rightarrow |\varphi(x,y)| = \bar{\lambda}\varphi(x,y) = \varphi(\bar{\lambda}x, y)$$

$$|\varphi(x,y)| = \varphi(\bar{\lambda}x, y) = \mathrm{Re}\,\varphi(\bar{\lambda}x, y) \le a$$

διότι $\|\bar{\lambda}x\| = \|x\| = 1$, $\|y\| = 1$

άρα $|\varphi(x,y)| \le a$ ■

$T: H_1 \to H_2$ γραμμ + φραγμ

T ισομετρία $\iff$ $\forall x \in H_1,\ \|Tx\|_2 = \|x\|_1$

$$\Downarrow ?$$

$$\forall x, y : \langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$$

αποδ $\quad \|Tx\|_2 = \|x\|_1 \ \forall x \in H_1$

$$\Downarrow$$

$$\langle Tx, Tx \rangle_2 = \langle x, x \rangle_1 \quad \forall x$$

$$\Downarrow \text{ polar}$$

$$\langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall x, y$$

$\langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y$

$$\Downarrow$$

$$\langle T^* Tx, y \rangle_1 = \langle Tx, Ty \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1 \quad \forall x, y$$

$$\Downarrow$$

$$T^* T = I_{H_1}$$

$T^* T = I_{H_1} \overset{?}{\Rightarrow} \|Tx\|_2 = \|x\|_1 \quad \forall x \in H_1$

αποδ $\quad \|Tx\|_2^2 = \langle Tx, Tx \rangle_2 = \langle T^* Tx, x \rangle_1$

$$= \langle x, x \rangle_1 = \|x\|_1^2$$

∎

Ορθογώνιος $\iff$ Ισομετρία + επί

$U : H_1 \to H_2$ ορθ. $\iff$ $U^*U = I_{H_1}$ (α)

και

$UU^* = I_{H_2}$ (β)

(α) $\iff$ U ισομετρία

U ορθογ. $\implies$ U ισομετρία και έχει αντίστροφο (τον U^*) άρα είναι επί

$(\impliedby)$ U ισομετρία + επί νδο U ορθογ.

ήδη U ισομετρία άρα $U^*U = I_{H_1}$

νδο $UU^* = I_{H_2}$

όμως U είναι επί, και είναι 1-1 (διότι ισομετρία)

άρα υπάρχει η γραμμ. απεικ.

$$U^{-1} : H_2 \to H_1$$

$$U^{-1}U = I_{H_1} = U^*U$$

$\Downarrow$ (αφού U επί)

$$U^{-1} = U^*$$

άρα

$$UU^* = UU^{-1} = I_{H_2}.$$

$\blacksquare$

Έστω $\dim H = n < +\infty$

Έστω $U : H \to H$ γραμμική και ισομετρία

άρα: $U^*U = I \Rightarrow UU^* = I$

όταν $\dim H < +\infty$

U είναι 1-1

$\Downarrow \dim H < +\infty$

U είναι επί

$\Downarrow$

U είναι unitary.

Όταν $\dim H = +\infty$

όχι πάντα!

πχ $S : \ell^2 \to \ell^2$

$e_n \to e_{n+1}$

$S^*S = I$ ενώ $SS^* \neq I$, $SS^*e_0 = 0$

Όμως μπορώ: $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \hookrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ισομετρικά

$(x(0), x(1), x(2), \ldots) \longrightarrow (\ldots, x(0), x(1), \ldots)$

και αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$:

$\underline{Ue_n = e_{n+1}}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

έχω $U\big|_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)} = S$

από ισομετρία στον $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

ευτύχια unitary στον $\mathcal{H}_2 = \ell^2(\mathbb{Z}) \supseteq H_1$

με: $U\big|_{H_1} = S$

Παρ/γ $\mathcal{H}=\ell^2$, $a=(a(n))$, $a(n)\in\mathbb{C}$

$$D_a : e_n \longrightarrow a(n)e_n$$

$$D_a \sim \begin{bmatrix} a(1) & & & \\ & a(2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

• $D_a^* = D_{\bar{a}}$ $\qquad \bar{a}(n)=\overline{a(n)}$

άρα $D_a^*D_a = D_{\bar{a}}D_a$. Έχω, $\forall n$,

$$D_a^*D_a : e_n \longrightarrow a(n)e_n \longrightarrow \overline{a(n)}a(n)e_n$$

$$D_aD_a^* : e_n \longrightarrow \overline{a(n)}e_n \longrightarrow a(n)\overline{a(n)}e_n$$

άρα $D_a^*D_a x = D_aD_a^* x$ $\forall x\in\ell^2$, άρα D_a φυσιολογικός.

Επίσης: $D_a = D_a^* \iff \langle D_a x, x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x\in\ell^2$
$\iff a(n)\in\mathbb{R}$

D_a unitary $\iff |a(n)|=1$ $\forall n$

διότι $D_a^*D_a(e_n) = |a(n)|^2 e_n$ $\forall$

D_a ισομετρία $\iff |a(n)|=1$ $\forall n$

αλλά αν D_a ισομετρία τότε
είναι unitary διότι φυσιολογικός και

αν $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ τότε;

$$f(t) = \mathrm{Re} f(t) + i\, \mathrm{Im} f(t)$$

όπου $\mathrm{Re} f(t) = \dfrac{f(t) + \overline{f(t)}}{2}$

όμοια: $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$A = A_1 + i A_2$ όπου

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad A_i^* = A_i \quad i = 1, 2$$

$$A_2 = \frac{A - A^*}{2i}$$

Παρατ. $A_1 A_2 = A_2 A_1 \Longleftrightarrow A^* A = A A^*$ (άσκ.)

Συμβολ: $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A = A^* \}$: $\mathbb{R}$-γραμμ. χώρος

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) + i\, \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$$

$\mathbb{C}$ - γραμμ. χώρος

$$\underbrace{\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) \cap i\, \mathcal{B}_h(\mathcal{H})}_{A} = \{0\}$$

διότι αν $A \in$ τότε $A = A^*$

και $A = iB$ με $B = B^*$

$\Downarrow$

$A = -A^*$ άρα $A = 0$

$\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$: πραγμ. γραμμ. χώρος

όχι άλγεβρα

διότι $A, B \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) \not\Longrightarrow AB \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

$$(AB)^* = B^* A^* = BA \neq AB$$

$$D_a = \begin{bmatrix} a(1) & & & \\ & a(2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad D_a = D_a^* \iff a(n) \in \mathbb{R} \ \forall n$$

να ορίσω $D_a \geq 0$ όταν $a(n) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$\forall x \in \ell^2$

$$\langle D_a x, x \rangle = \langle D_a (x(n)), (x(n)) \rangle$$

$$= \langle (a(n) x(n)), (x(n)) \rangle \geq 0$$

$$= a(n) |x(n)|^2 \geq 0$$

$$T \geq 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T = T^*$$

- συζητούνται τελεστές μόνο για αυτοσυζυγείς
- $D_a \geq 0 \iff a(n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $M_f \geq 0 \iff f(t) \geq 0 \quad \forall t$

$$M_f : L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$$
$$g \longmapsto fg$$

$$M_f \geq 0 \iff \langle M_f g, g \rangle \geq 0 \quad \forall g$$

$$\Updownarrow$$

$$\int f g \bar{g} \geq 0 \quad \forall g$$

$$\Downarrow \; ?? \quad (*)$$

$$f(t) \geq 0$$

αντίστροφως, αν $f(t) \geq 0$ $\forall t$ τότε $\forall g$

$$\int f g \bar{g} = \int f |g|^2 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\langle M_f g, g \rangle \geq 0$$

<u>Απόδ (*)</u>: $M_f \geq 0 \Rightarrow M_f = M_f^* \Rightarrow f(t) \in \mathbb{R}$ $\forall t$

αν $\exists\, t_0$ όπου $f(t_0) \notin \mathbb{R}_+$

τότε $f(t_0) = -\delta$, $\delta > 0$

άρα $\exists$ περιοχή V του t_0 ώστε $\forall t \in V$

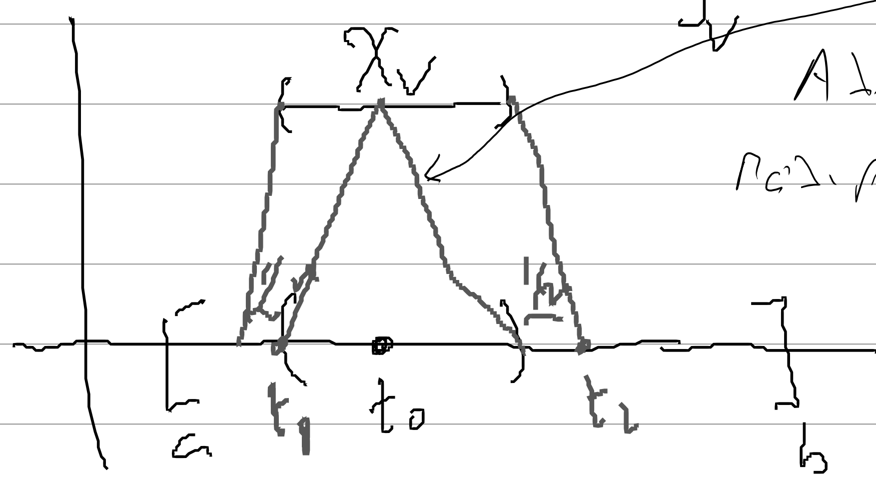
$$f(t) < -\delta/2 \quad (\text{συνέχεια})$$

$\Rightarrow$ Αν πάρω για g την $g = \chi_V$

η οποία ανήκει στο L^2 (γιατί;)

Τότε $\langle M_f g, g\rangle = \int f(t)|g(t)|^2 dt$

$$= \int_V f(t)\,dt < -\frac{\alpha}{2}|V| < 0$$



Αλλιώς: πάρε για g την [illegible] τριγωνική $\langle M_f g, g\rangle < 0$

Σωστό!

$T_n \geq 0 \quad \forall n, \quad \|T_n - T\| \to 0$

$$\Downarrow$$

$$T \geq 0$$

dùn $T_n \xrightarrow{\|\,\|} T \Rightarrow \forall x,\ T_n x \to Tx$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle T_n x, x\rangle}_{\geq 0} \to \underbrace{\langle Tx, x\rangle}_{\geq 0}$$

$$\geq 0 \Rightarrow \geq 0 \quad \forall x$$

Mở rộng, cho $T \in B(H)$ sao $T_n x \to Tx$ $\forall x \in H$

với $T_n \geq 0$ thì $T \geq 0$

$\forall f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $f(t) \in \mathbb{R}$ $\forall t$

τότε $\exists\, f_+, f_-$ συνεχείς, $f_\pm \geq 0$

και $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ $\forall t$

Θέλω το ίδιο για τελεστές

$f \Rightarrow |f|$ συνεχής

$$f_+ = \frac{|f| + f}{2}$$

$$|f| = \sqrt{f\bar{f}}$$

όμοια: $A \in \underline{B(H)}$:

$$A^*A \geq 0$$

διότι $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$

ορισμός $|A| = (A^*A)^{1/2}$ (αυτό θέλει ορισμό)

(εκτός ύλης!)

$\underline{A = A^*}$:

$$A = (A + \|A\| I) - \underbrace{\|A\| I}_{\text{θετικός}}$$

δηλ. $\langle \|A\| I x, x\rangle = \|A\| \langle x, x\rangle \geq 0$

$\downarrow$

θετικός !

$$\langle (A + \|A\| I) x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \|A\| \langle x, x\rangle \overset{?}{\geq} 0$$

δηλ. $\langle Ax, x\rangle \overset{?}{\geq} -\|A\| \langle x, x\rangle \quad \forall x$

Προφανώς, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$

και $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\| \|x\|^2$

$\Updownarrow$

$$\forall x \quad -\|A\| \langle x, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle \leq \|A\| \langle x, x\rangle$$

$\Updownarrow$

$$\forall x \quad \langle (-\|A\| I) x, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle \leq \langle (\|A\| I) x, x\rangle$$

$$\rightsquigarrow \quad -\|A\| I \leq A \leq \|A\| I$$

$\Updownarrow$

$$A + \|A\| I \geq 0, \quad \|A\| I - A \geq 0$$

(Αλλά η διάσπαση $A = (A + \|A\| I) - \|A\| I$ δεν είναι η καλύτερη!!!)