Για τον τελεστή Volterra

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό

$$(Vf)(t) = \int_t^1 f(s)ds, \qquad f \in C([0,1]).$$

Η ανισότητα

$$|(Vf)(t)|^2 = \left|\int_t^1 f(s)1ds\right|^2 \leqslant \int_t^1 |f(s)|^2 ds \int_t^1 1ds \leqslant (1-t)\,\|f\|^2$$

δίνει

$$\|Vf\|_2^2 \leqslant \int_0^1 (1-t)\,\|f\|^2\,dt = \frac{1}{2}\,\|f\|^2$$

και συνεπώς ο V επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον $L^2([0,1])$.

Υπολογισμός του V^* Με τον ίδιο τρόπο, αν ορίσουμε

$$(Wf)(t) = \int_0^t f(s)ds, \qquad f \in C([0,1])$$

βλέπουμε ότι ο W επίσης επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον $L^2([0,1])$.

Αν $f, g \in C([0,1])$, έχουμε

$$\langle f, V^*g\rangle = \langle Vf, g\rangle = \int_0^1 \left(\int_t^1 f(s)ds\right)\overline{g(t)}dt = \int_0^1 \left(\int_0^s f(s)\overline{g(t)}dt\right)ds = \langle f, Wg\rangle$$

(η αλλαγή της τάξης ολοκλήρωσης είναι επιτρεπτή, αφού πρόκειται για συνεχείς συναρτήσεις - Απειρ. III). Η ισότητα αυτή δείχνει ότι $V^*g = Wg$ για κάθε $g \in C([0,1])$ και συνεπώς, αφού και οι δύο τελεστές είναι φραγμένοι και συμπίπτουν σε ένα πυκνό υποσύνολο, έπεται ότι $V^* = W$. Δείξαμε ότι

$$(V^*f)(t) = \int_0^t f(s)ds, \qquad f \in C([0,1]).$$

Παρατήρηση Έπεται ότι

$$((V+V^*)f)(t) = \int_0^t f(s)ds + \int_t^1 f(s)ds = \int_0^1 f(s)ds \quad \text{για κάθε } t \in [0,1]$$

δηλαδή η συνάρτηση $(V+V^*)f$ είναι σταθερή,

$$(V+V^*)f = \langle f, \mathbf{1}\rangle\,\mathbf{1}\,.$$

Επομένως (μολονότι ο V έχει άπειρη τάξη) ο τελεστής $V+V^*$ είναι πρώτης τάξης: είναι μάλιστα η προβολή στον μονοδιάστατο υπόχωρο που παράγεται από τη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$.

Ισχυρισμός: Ο V είναι ένα προς ένα. Για να το δείξουμε, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο τιμών $\mathrm{im}V^*$ είναι πυκνό στον $L^2([0,1])$. Θα δείξουμε ότι η κλειστή θήκη του $\mathrm{im}V^*$ περιέχει όλα τα πολυώνυμα.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $n \in \mathbb{Z}_+$ και $g(t) = t^n$, τότε $(V^*g)(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. Συνεπώς ο υπόχωρος $\mathrm{im}V^*$ περιέχει όλα τα πολυώνυμα χωρίς σταθερό όρο. Δείχνουμε ότι το σταθερό πολυώνυμο $\mathbf{1}$ προσεγγίζεται, στη νόρμα του $L^2([0,1])$, από τέτοια πολυώνυμα: Έστω $\varepsilon \in (0,1)$

και έστω $g : [0,1] \to [0,1]$ μια συνεχής συνάρτηση ώστε $g(0) = 0$ και $g(t) = 1$ για $t \in [\varepsilon, 1]$ (παραδείγματος χάριν, με γράφημα κατά τμήματα ευθύγραμμο). Τότε

$$\|\mathbf{1} - g\|_2^2 = \int_0^1 |1 - g(t)|^2 dt = \int_0^\varepsilon |1 - g(t)|^2 dt + \int_\varepsilon^1 |1 - g(t)|^2 dt \leqslant \int_0^\varepsilon 1^2 dt + 0 < \varepsilon\,.$$

Από το θεώρημα Weierstrass, η g προσεγγίζεται από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Υπάρχει λοιπόν ένα πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$. Τότε όμως $|p(0)| = |p(0) - g(0)| < \varepsilon$.

Συνεπώς αν ορίσουμε $q(t) = p(t) - p(0)$ έχουμε ένα πολυώνυμο q χωρίς σταθερό όρο τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} & |g(t) - q(t)| \leqslant |g(t) - p(t)| + |p(0)| \leqslant \|g - p\|_\infty + |p(0)| < 2\varepsilon \\ \text{άρα} \quad & \|g - q\|_\infty \leqslant \|g - p\|_\infty + |p(0)| < 2\varepsilon \\ \text{και συνεπώς} \quad & \|g - q\|_2 \leqslant \|g - q\|_\infty < 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Τελικά για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο q χωρίς σταθερό όρο τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{1} - q\|_2 \leqslant \|\mathbf{1} - g\|_2 + \|g - q\|_2 < 3\varepsilon$$

άρα το σταθερό πολυώνυμο ανήκει και αυτό στην κλειστή θήκη του $\mathrm{im}V^*$.

Παρατήρηση Αν χρησιμοποιήσει κανείς Θεωρία Μέτρου, οι προηγούμενοι συλλογισμοί απλοποιούνται αρκετά: Η Vf ορίζεται απευθείας για κάθε $f \in L^2([0,1])$ από τον τύπο $Vf(t) = \int_t^1 f(s)ds$, ο υπολογισμός του V^* γίνεται επίσης απευθείας με αλλαγή της τάξης ολοκλήρωσης στο ολοκλήρωμα Lebesgue (Θεώρημα Fubini) και τέλος, αν $Vf(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$, τότε έχουμε $\int_t^u f(s)ds$ για κάθε $t < u$ στο $[0,1]$, από το οποίο προκύπτει ότι $f(s) = 0$ *σχεδόν* για κάθε $s \in [0,1]$, πράγμα που σημαίνει ακριβώς ότι η f είναι το μηδενικό στοιχείο του $L^2([0,1])$.