

Άσκηση: Οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι συμπαγείς II

Ο στόχος της άσκησης είναι να δείξουμε ότι κάθε ολοκληρωτικός τελεστής T_k με (συνεχή) πυρήνα $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συμπαγής.

Έστω $H = L^2([0, 1])$ και $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, δηλ. $k \in C([0, 1]^2)$. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό

$$(T_k f)(s) = \int k(s, t) f(t) dt, \quad f \in H.$$

Η ιδέα της απόδειξης είναι να παρατηρήσουμε ότι ένας ολοκληρωτικός τελεστής που ο πυρήνας του είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ορθογωνίου ορίζει τελεστή πρώτης τάξης, και να προσεγγίσουμε τον T_k ως προς τη νόρμα τελεστή από ολοκληρωτικούς τελεστές με τέτοιους πυρήνες.

Λήμμα. Αν $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων $R_{1,1}, \dots, R_{n,n}$ μέσα στο $[0, 1] \times [0, 1]$ και $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{C}$ ώστε ¹

$$\text{αν } k_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_{R_{i,j}} \quad \text{τότε } \|k - k_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της k , για το δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν (x, y) και (s, t) είναι σημεία του $[0, 1] \times [0, 1]$ που ικανοποιούν $\max\{|x - s|, |y - t|\} < \delta$, τότε $|k(x, y) - k(s, t)| < \varepsilon$.

Ας διαμερίσουμε τώρα το $[0, 1] \times [0, 1]$ σε πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων με πλευρές μήκους μικρότερου από δ : για παράδειγμα, ας διαλέξουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$, και ας θέσουμε $R_{i,j} = I_i \times I_j$, όπου $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ όταν $i = 1, \dots, n-1$ και $I_n = [\frac{n-1}{n}, 1]$.

Κάθε $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ανήκει σε ακριβώς ένα ορθογώνιο R_{i_s, j_s} , οπότε $|k(s, t) - k(\frac{i_s-1}{n}, \frac{j_s-1}{n})| < \varepsilon$. Επομένως αν ορίσουμε $a_{i,j} = k(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n})$ και

$$k_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_{R_{i,j}}$$

τότε

$$|k(s, t) - k_\varepsilon(s, t)| = |k(s, t) - a_{i_s, j_s}| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\sup\{|k(s, t) - k_\varepsilon(s, t)| : (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]\} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Παρατήρησε ότι, αν ονομάσουμε χ_i τη χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος I_i , τότε $\chi_{R_{i,j}}(s, t) = \chi_i(s) \chi_j(t)$. Η γραμμική μορφή ²

$$\chi_j^* : f \rightarrow \int \chi_j(t) f(t) dt = \int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}} f(t) dt = \langle f, \chi_j \rangle$$

¹ Έτσι δεν δείχνουμε στον Απειρ. III ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1] \times [0, 1]$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη;

² παρατήρησε ότι $\chi_j \in H$ (γιατί;)

είναι συνεχής στον H (ανισότητα Cauchy - Schwarz). Συνεπώς ο τύπος

$$T_\varepsilon f := \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_j^*(f) \chi_i = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} (\chi_i \otimes \chi_j^*)(f)$$

ορίζει (φραγμένο) τελεστή T_ε πεπερασμένης τάξης στον H . Αν $f \in C([0, 1])$, για κάθε $s \in [0, 1]$ η συνάρτηση $t \rightarrow k_\varepsilon(s, t)f(t)$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και

$$\int k_\varepsilon(s, t)f(t)dt = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_i(s) \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(t)dt = (T_\varepsilon f)(s).$$

Εφόσον $|k(s, t) - k_\varepsilon(s, t)| \leq \varepsilon$ για κάθε (s, t) , έχουμε

$$\begin{aligned} |(T_k f)(s) - (T_\varepsilon f)(s)|^2 &= \left| \int (k(s, t) - k_\varepsilon(s, t))f(t)dt \right|^2 \leq \left(\int |k(s, t) - k_\varepsilon(s, t)||f(t)|dt \right)^2 \\ &\stackrel{(cs)}{\leq} \int |k(s, t) - k_\varepsilon(s, t)|^2 dt \int |f(t)|^2 dt \leq \varepsilon^2 \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

για κάθε $s \in [0, 1]$, όπου στην (cs) χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz. Έπεται ότι

$$\|T_k f - T_\varepsilon f\|_2^2 = \int_0^1 |(T_k f)(s) - (T_\varepsilon f)(s)|^2 \leq \varepsilon^2 \|f\|_2^2$$

για κάθε $f \in C([0, 1])$. Επομένως

$$\|T_k - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Αφού ο T_ε έχει πεπερασμένη τάξη για κάθε ε , δείξαμε ότι ο T_k προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα τελεστή από τελεστές πεπερασμένης τάξης, και άρα είναι συμπαγής.