Άσκηση 1 *Στόχος της άσκησης είναι να δειχθεί ότι το άθροισμα $M+N$ δύο κλειστών υποχώρων M, N ενός χώρου H, ακόμα και χώρου Hilbert, δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό: Στον χώρο Hilbert ℓ^2 ορίζω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_n = e_{2n-1} \quad \textit{και} \quad y_n = \cos\frac{1}{n}e_{2n-1} + \sin\frac{1}{n}e_{2n}$$

και ονομάζω M την κλειστή γραμμική θήκη του $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και N την κλειστή γραμμική θήκη του $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. (Παρατηρήστε ότι η «γωνία» μεταξύ των x_n και y_n είναι $1/n$.) Δείξτε ότι η τομή $M \cap N$ ισούται με $\{0\}$, και επομένως το άθροισμα $M+N$ είναι (αλγεβρικά) ευθύ.
Δείξτε ότι το διάνυσμα $z = (0, \sin(1), 0, \sin(1/2), 0, ...)$ ανήκει στο $\overline{M+N}$ αλλά όχι στο $M+N$.

Λύση Παρατηρούμε πρώτα ότι τα x_n και y_n είναι ορθοκανονικά σύνολα,[1] άρα είναι ορθοκανονικές βάσεις των M και N αντίστοιχα. Συνεπώς αν $x \in M \cap N$ τότε υπάρχουν a_n, b_n ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$$

επομένως

$$0 = \langle x, e_{2n} \rangle = b_n \sin\frac{1}{n}$$

άρα $b_n = 0$ για κάθε n και συνεπώς $x = 0$. Δείξαμε ότι η τομή $M \cap N$ ισούται με $\{0\}$. Επίσης έχουμε $\overline{M+N} = \ell^2$. Πράγματι, το άθροισμα $M+N$ περιέχει ολόκληρη την ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του ℓ^2, γιατί

$$e_{2n-1} = x_n \in M \quad \text{και} \quad e_{2n} = \frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\left(y_n - x_n \cos\frac{1}{n}\right) \in M+N.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $z \in \ell^2$. Πράγματι, έχουμε $\sum_n |\sin\frac{1}{n}|^2 \leq \sum \frac{1}{n^2} < \infty$, άρα η σειρά

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right) e_{2n}$$

συγκλίνει. Συνεπώς $z \in \overline{M+N}$ και μένει να δειχθεί ότι $z \notin M+N$.
Αν $z = x + y$ όπου $x \in M$ και $y = \sum_n c_n y_n \in N$ τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin\frac{1}{n} = \langle z, e_{2n} \rangle = \langle x, e_{2n} \rangle + \langle y, e_{2n} \rangle = 0 + c_n \sin\frac{1}{n}$$

οπότε $c_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως η σειρά $y = \sum_n c_n y_n$ συγκλίνει, άρα $\sum |c_n|^2 < \infty$, άτοπο.

[1] αν $n \neq m$ τότε $\langle y_n, y_m \rangle = 1$, και $\|y_n\|^2 = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 = 1$.