Άσκηση: Η προβολή στην τομή δύο υποχώρων

Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σε έναν χώρο Hilbert H και $R = P \wedge Q$ είναι η προβολή στην τομή $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$, δείξτε ότι, για κάθε $x \in H$,

$$Rx = \lim_n (PQP)^n x = \lim_n (PQ)^n x = \lim_n (QP)^n x.$$

Εξετάστε πότε οι ακολουθίες τελεστών $\{(PQP)^n\}$, $\{(PQ)^n\}, \{(QP)^n\}$ συγκλίνουν ως προς τη νόρμα του $B(H)$.

1. Σημειακή σύγκλιση.

Ο τελεστής $T = PQP$ είναι θετική συστολή ($0 \le T \le I$). Έπεται ότι η ακολουθία $((PQP)^n)$ είναι φθίνουσα. Πράγματι, [1] για κάθε $x \in H$,

$$\left\langle (T^{2n} - T^{2n+1})x, x \right\rangle = \langle T^n (I - T) T^n x, x \rangle = \langle (I - T) T^n x, T^n x \rangle \ge 0$$

αφού $I - T \ge 0$ και

$$\left\langle (T^{2n+1} - T^{2n+2})x, x \right\rangle = \left\langle (T - T^2) T^n x, T^n x \right\rangle \ge 0$$

γιατί $PQ(I - P)QP = P(Q - QPQ)P = PQP - PQPQP = T - T^2$ άρα

$$\left\langle (T - T^2)y, y \right\rangle = \langle PQ(I - P)QPy, y \rangle = \langle (I - P)QPy, QPy \rangle \ge 0.$$

Κατά συνέπεια [2] υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής E ώστε

$$\langle Ex, x \rangle = \lim_n \langle (PQP)^n x, x \rangle$$

για κάθε $x \in H$, επομένως $0 \le E \le I$.
Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $x \in H$,

$$(PQP)^m Ex = (PQP)^m \lim_{n\to\infty} (PQP)^n x = \lim_{n\to\infty} (PQP)^{m+n} x = Ex$$

οπότε

$$E(Ex) = \lim_m (PQP)^m Ex = Ex,$$

δηλαδή $E^2 = E$, άρα η E είναι προβολή (αφού είναι και θετικός τελεστής).
Όμως $(PQP)^m P = (PQP)^m$ για κάθε m, άρα

$$EPx = \lim_m (PQP)^m Px = Ex,$$

για κάθε $x \in H$, που σημαίνει ότι $EP = E$, δηλαδή $P \ge E$. Επίσης, αφού $(PQP)^m = (PQP)^m P$ και $(PQP)^n = P(PQP)^n$,

$$\begin{aligned}(PQP)^m QEx &= (PQP)^m Q \lim_{n\to\infty} (PQP)^n x = \lim_{n\to\infty} (PQP)^m (PQP)(PQP)^n x \\ &= \lim_{n\to\infty} (PQP)^{m+n+1} x = Ex\end{aligned}$$

---

[1] Αν θεωρηθεί γνωστό ότι ο T έχει θετική τετραγωνική ρίζα, αρκεί να εξετάσει κανείς τη διαφορά $T^k - T^{k+1}$, χωρίς να εξετάσει χωριστά άρτιους και περιττούς όρους.

[2] Για κάθε $x \in H$ η ακολουθία $(\langle (PQP)^n x, x \rangle)$ συγκλίνει, οπότε για κάθε $x, y \in H$ η ακολουθία $(\langle (PQP)^n x, y \rangle)$ συγκλίνει και ορίζει μια sesquilinear μορφή $\phi(x, y) = \lim_n \langle (PQP)^n x, y \rangle$ που είναι και φραγμένη εφόσον $| \langle (PQP)^n x, y \rangle | \le \|x\| \, \|y\|$ για κάθε $x, y \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

άρα $EQEx = \lim_m (PQP)^m QEx = Ex$, οπότε $EQE = E$. Κατά συνέπεια

$$0 = E^2 - EQE = E(I-Q)E = EQ^\perp E = EQ^\perp Q^\perp E = (Q^\perp E)^*(Q^\perp E)$$

άρα $Q^\perp E = 0$, οπότε $E \leq Q$.
Δείξαμε ότι $E \leq R = P \wedge Q$.
Όμως, αν F είναι προβολή τέτοια ώστε $F \leq P$ και $F \leq Q$, τότε $FP = F$ και $FQ = F$ άρα $F(PQP)^n = F$ για κάθε n, οπότε $FE = F$ δηλαδή $F \leq E$.

Έπεται λοιπόν ότι $E = P \wedge Q$.

Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned}
(PQ)^{n+1} &= (PQP)^n Q = P(QPQ)^n \\
(QP)^{n+1} &= (QPQ)^n P = Q(PQP)^n \\
(PQP)^n &= (PQ)^n P = P(QP)^n.
\end{aligned}$$

Επομένως η σύγκλιση κάθε μιας από τις ακολουθίες αυτές είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κάθε άλλης. Μάλιστα όλες συγκλίνουν το ίδιο όριο, καθώς για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_n (PQ)^{n+1}x = \lim (PQP)^n Qx = RQx = Rx \quad \text{και} \\
&\lim_n (QP)^{n+1}x = \lim Q(PQP)^n x = QRx = Rx.
\end{aligned}$$

2. Σύγκλιση ως προς τη νόρμα του $B(H)$. Αν $P_1 = P - R$ και $Q_1 = Q - R$, τότε

$$P_1 Q_1 P_1 = (P-R)(Q-R)(P-R) = PQP - R$$

διότι $PR = RP = R$ και $QR = RQ = R$. Εύκολα δείχνουμε ότι

$$(P_1 Q_1 P_1)^n = (PQP)^n - R$$

(επαγωγή). Ξέρουμε ότι η ακολουθία $\{(PQP)^n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στον R. Άρα συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $B(H)$ αν και μόνον αν $\|(P_1 Q_1 P_1)^n\| \to 0$.

Ισχυρισμός 1 $\|(PQP)^n - R\| \to 0$ *αν και μόνον αν* $\|P_1 Q_1 P_1\| < 1$, *δηλαδή αν και μόνον αν* $\|PQP - R\| < 1$.

Απόδειξη: Θέτω $A = P_1 Q_1 P_1$. Αν $\|(PQP)^n - R\| \to 0$, δηλαδή $\|A^n\| \to 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\|A^m\| < 1$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ ώστε $2^n - m = k \geq 0$. Τότε

$$\left\|A^{2^n}\right\| = \left\|A^k A^m\right\| \leq \left\|A^k\right\| \|A^m\| < 1$$

(αφού $\|A\| \leq \|P\| \|Q\| \|P\| \leq 1$ άρα $\left\|A^k\right\| \leq 1$). Όμως ο A είναι αυτοσυζυγής, άρα $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \left\|A^2\right\|$ και συνεπώς επαγωγικά $\|A\|^{2^n} = \left\|A^{2^n}\right\| < 1$ οπότε $\|A\| < 1$.
Για το αντίστροφο, αν $\|PQP - R\| < 1$, δηλαδή $\|A\| < 1$, τότε $\|A^m\| \leq \|A\|^m \to 0$. $\square$

3. Η συνθήκη $\|PQP - R\| < 1$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$$\|QP - R\| < 1 \quad \text{ή} \quad \|PQ - R\| < 1$$

γιατί

$$\begin{aligned}\|QP-R\|^2 &= \|(QP-R)^*(QP-R)\| = \|(PQ-R)(QP-R)\| \\ &= \|PQP-RQP-PQR+R\| = \|PQP-R\|.\end{aligned}$$

4. *Αποδεικνύεται ότι $\|PQ-R\|<1$ αν και μόνον αν το άθροισμα $\operatorname{im}P+\operatorname{im}Q$ είναι κλειστός υπόχωρος.*

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η τομή των υποχώρων $M=P(H)$ και $N=Q(H)$ είναι τετριμένη.
Ορίζουμε τότε το «συνημίτονο της γωνίας των υποχώρων» ως εξής

$$\cos\theta(M,N)=\sup\{|\langle\xi,\eta\rangle| : \xi\in M, \eta\in N, \|\xi\|\le 1, \|\eta\|\le 1\}.$$

Θα δείξουμε ότι το άθροισμα $M+N$ είναι κλειστό αν και μόνον αν οι υπόχωροι M και N «σχηματίζουν θετική γωνία».

Παρατήρηση 2 $\cos\theta(M,N)=\|PQ\|$.

Απόδειξη Για κάθε $\xi\in M, \eta\in N$ με $\|\xi\|\le 1$ και $\|\eta\|\le 1$ έχουμε

$$|\langle\xi,\eta\rangle| = |\langle P\xi, Q\eta\rangle| = |\langle\xi, PQ\eta\rangle| \le \|PQ\|$$

άρα $\cos\theta(M,N)\le\|PQ\|$. Για την αντίστροφη ανισότητα, αν $\epsilon>0$, υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα $x,y\in H$ ώστε $\|PQ\|-\epsilon<|\langle x,PQy\rangle|$. Παρατηρούμε ότι

$$\|PQ\|-\epsilon < |\langle x,PQy\rangle| = |\langle Px,Qy\rangle| \le \cos\theta(M,N)$$

αφού τα Px και Qy ανήκουν στους M και N αντίστοιχα και έχουν νόρμα το πολύ 1. □

Πρόταση 3 *Έστω ότι $\|PQ\|=c<1$. Τότε ο υπόχωρος $M+N$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη Παρατηρώ ότι για κάθε $x\in M$ και $y\in N$ έχουμε $|\langle x,y\rangle|\le c\|x\|\,\|y\|$, οπότε

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle} \\ &\ge \|x\|^2+\|y\|^2-2|\langle x,y\rangle| \ge \|x\|^2+\|y\|^2-2c\|x\|\,\|y\| \ge \|x\|^2+\|y\|^2-c(\|x\|^2+\|y\|^2)\end{aligned}$$

Αν $x_n\in M$, $y_n\in N$ και η ακολουθία (x_n+y_n) συγκλίνει στο ξ, θα δείξω ότι υπάρχουν $x\in M, y\in N$ ώστε $x+y=\xi$. Πράγματι, η ακολουθία (x_n+y_n) είναι βασική και, από την προηγούμενη ανισότητα,

$$\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\|^2 = \|x_n-x_m+y_n-y_m\|^2 \ge (1-c)(\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2)$$

πράγμα που σημαίνει ότι οι (x_n) και (y_n) είναι βασικές ακολουθίες, άρα συγκλίνουν και $x:=\lim_n x_n\in M$, αφού ο M είναι κλειστός. Ομοίως $y:=\lim_n y_n\in N$, οπότε $\xi=\lim_n(x_n+y_n)=x+y$. □

Πρόταση 4 *Έστω ότι ο υπόχωρος $M+N$ είναι κλειστός. Τότε $\|PQ\|<1$.*

Απόδειξη Εφόσον $M\cap N=\{0\}$, κάθε $z\in M+N$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $z=x+y$ όπου $x\in M$ και $y\in N$. Ορίζεται λοιπόν η «λοξή» προβολή $T:M+N\to M+N$ από τη σχέση $T(z)=x$ και έχει σύνολο τιμών M και πυρήνα N.
Ισχυρισμός: Ο τελεστής T είναι φραγμένος.

Απόδειξη Αφού το $M+N$ είναι κλειστό, είναι χώρος Banach. Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι το γράφημα του T είναι κλειστό (Θεώρημα κλειστού γραφήματος). Θεωρούμε μια ακολουθία $(\xi_n, T\xi_n)$ που συγκλίνει στο $(0,\eta)$ και πρέπει να δείξουμε ότι $\eta=0$. [3] Έχουμε $\eta = \lim_n T\xi_n \in M$, αφού κάθε $T\xi_n$ ανήκει στον κλειστό υπόχωρο M. Όμως, αν $z_n = T\xi_n - \xi_n$, τότε $Tz_n = T^2\xi_n - T\xi_n = 0$, άρα $z_n \in \ker T = N$ για κάθε n. Από την άλλη μεριά, $z_n \to \eta - 0 = \eta$, άρα $\eta \in N$ (ο N είναι κλειστός). Συνεπώς, $\eta \in M \cap N$, δηλαδή $\eta = 0$. $\square$

Ισχυρισμός: $\|PQ\| \le 1 - \dfrac{1}{2\|T\|^2}$, *άρα* $\|PQ\| < 1$.

Απόδειξη Αν $x \in M$ και $y \in N$ είναι μοναδιαία διανύσματα, τότε

$$1 = \|x\| = \|T(x-y)\| \le \|T\|\,\|x-y\| \quad \text{άρα} \quad \|x-y\| \ge \frac{1}{\|T\|}\,.$$

$$\text{Συνεπώς} \quad \frac{1}{\|T\|^2} \le \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle \quad \text{άρα} \quad \operatorname{Re}\langle x,y\rangle \le 1 - \frac{1}{2\|T\|^2}\,.$$

Αν γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό $\langle x,y\rangle$ σε πολική μορφή $\langle x,y\rangle = e^{it}|\langle x,y\rangle|$ τότε

$$|\langle x,y\rangle| = \left\langle x, e^{it}y\right\rangle \le 1 - \frac{1}{2\|T\|^2}.$$

Αφού η τελευταία ανισότητα ισχύει για όλα τα μοναδιαία διανύσματα $x \in M$ και $y \in N$, ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε. $\square$

5. Η γενική περίπτωση. Αν η τομή $L = M \cap N$ δεν είναι τετριμένη, θεωρούμε τους υποχώρους $M_1 = M \cap L^\perp$ και $N_1 = N \cap L^\perp$ που έχουν τετριμένη τομή.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $M+N$ είναι κλειστό αν και μόνον αν το αθροισμα M_1+N_1 είναι κλειστό. Πράγματι: Έστω ότι το $M+N$ είναι κλειστό. Αν $\xi \in \overline{M_1+N_1}$, τότε $\xi = \lim \xi_n$ όπου $\xi_n = x_n + y_n$ με $x_n \in M_1$ και $y_n \in N_1$. Επομένως $\xi_n \perp L$ άρα και $\xi \perp L$, οπότε $R\xi = 0$. Επίσης $\xi \in \overline{M+N} = M+N$ άρα υπάρχουν $x \in M$, $y \in N$ ώστε $\xi = x+y$. Τότε

$$\xi = \xi - R\xi = (I-R)x + (I-R)y \in M_1 + N_1.$$

Έστω αντίστροφα ότι το M_1+N_1 είναι κλειστό. Αν $\eta \in \overline{M+N}$, τότε $\eta = \lim \eta_n$ όπου $\eta_n = u_n + v_n$ με $u_n \in M$ και $v_n \in N$, οπότε $(I-R)\eta_n = (I-R)u_n + (I-R)v_n \in M_1 + N_1$ άρα $(I-R)\eta = \lim_n (I-R)\eta_n \in M_1+N_1$. Επίσης $R\eta \in M \cap N \subseteq M+N$, άρα τελικά $\eta = R\eta + (I-R)\eta \in M+N$.

Απο τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι το M_1+N_1 είναι κλειστό αν και μόνον αν $\|P_1Q_1\| < 1$. Όμως $P_1Q_1 = PQ - R$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι το άθροισμα $M+N$ είναι κλειστό αν και μόνον αν $\|PQ-R\| < 1$.

5. Παράδειγμα. Αν $\{e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία, θέτουμε $x_n = e_{2n-1}$ και $y_n = \cos\frac{1}{n}e_{2n-1} + \sin\frac{1}{n}e_{2n}$. Αν M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της $\{x_n\}$ και N η κλειστή γραμμική θήκη της $\{y_n\}$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $M \cap N = \{0\}$ και ότι

$$\cos\theta(M,N) = \sup\{|\langle x,y\rangle| : \, x \in M, y \in N, \, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} \ge \sup\{|\langle x_n, y_n\rangle|\} = 1$$

[3] Αυτό αρκεί: γιατί αν $(u_n, Tu_n) \to (u,v)$ τότε $(u_n - u, T(u_n - u)) \to (0, v - Tu)$ οπότε $v - Tu = 0$ δηλαδή το (u,v) ανήκει στο γράφημα του T.

άρα ο χώρος $M+N$ δεν είναι κλειστός. Μάλιστα μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς απευθείας ότι το $z=\sum \sin \frac{1}{n} e_{2n}$ ανήκει στον $\overline{M+N}$ αλλά όχι στον $M+N$. [4]

6. Παρατηρήσεις. (α) Η συνθήκη $\|PQ-R\|<1$ ισχύει κατά τετριμένο τρόπο όταν οι P και Q μετατίθενται: τότε $PQ=R$.

(β) Η συνθήκη $\|PQ-R\|<1$ ισχύει αυτομάτως όταν ο $PQP-R$ είναι συμπαγής (αυτό συμβαίνει για παράδειγμα όταν μια από τις προβολές $P-R$ ή $Q-R$ είναι πεπερασμένης τάξης).

Πράγματι, ο τελεστής $PQP-R$ είναι θετικός. Αν είναι συμπαγής, έχει, όπως έχουμε δείξει, μία ιδιοτιμή ίση με τη νόρμα του. Αν λοιπόν $\|PQ-R\|=1$, οπότε και $\|PQP-R\|=1$, υπάρχει μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα x με ιδιοτιμή 1, δηλαδή

$$(PQP-R)x=x.$$

Τότε όμως $Rx=R(PQP-R)x=Rx-Rx=0$, άρα $x=PQPx$, οπότε $x=(PQP)^n x$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αλλά ξέρουμε ότι $\lim_n (PQP)^n x=Rx=0$, άτοπο!

(γ) Όμως η συμπάγεια του $PQP-R$ δεν είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι το άθροισμα $M+N$ κλειστό. Παράδειγμα: Αν $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση ενός χώρου Hilbert, ονομάζουμε M τον κλειστό υπόχωρο που παράγεται από τα $\{e_{2n-1}:n\in\mathbb{N}\}$ και N τον κλειστό υπόχωρο που παράγεται από τα $\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$ όπου $y_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1}+e_{2n})$ (θετική γωνία: $\pi/4$). Εδώ η προβολή P ορίζεται από τις σχέσεις $Pe_{2n-1}=e_{2n-1}$ και $Pe_{2n}=0$ και η Q από τις σχέσεις $Qe_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1}+e_{2n})$ και $Qe_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1}+e_{2n})$. Η προβολή R στην τομή $M\cap N$ είναι 0, και ο τελεστής PQP ορίζεται από τις σχέσεις $PQPe_{2n-1}=PQe_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}e_{2n-1}$ και $PQPe_{2n}=0$. Δηλαδή $PQP-R=PQP=\frac{1}{\sqrt{2}}P$: έχουμε $\|PQP-R\|<1$ αλλά ο $PQP-R$ δεν είναι συμπαγής.

[4] Δες στο `http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122 Έγγραφα 2006, 4 askangl.pdf`