

## Μια παρατήρηση

Αν  $H, K$  είναι χώροι Hilbert και  $T : H \rightarrow K$  είναι συμπαγής τελεστής, τότε και ο  $T^* : K \rightarrow H$  είναι συμπαγής.

Η απόδειξη της Πρότασης 3.3.8 μεταφέρεται αυτολεξεί.

Όμως, στην περίπτωση  $H = K$ , υπάρχει μια εντελώς άμεση απόδειξη, όπως παρατήρησε ο Ηλίας: Πράγματι, από το Θεώρημα 3.2.11 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ορθοκανονική ακολουθία  $(x_n)$  στον  $H$  ισχύει ότι  $\langle T^* x_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ . Όμως αφού ο  $T$  είναι συμπαγής, ισχύει ότι  $\langle T x_n, x_n \rangle \rightarrow 0$  (Θεώρημα 3.2.11, πάλι), άρα και το ζητούμενο, αφού  $\langle T^* x_n, x_n \rangle = \overline{\langle T x_n, x_n \rangle}$ !

(Βέβαια, η Πρόταση 3.3.8 λέει και κάτι περισσότερο: λέει ότι μπορώ να συμπεράνω την συμπαγεία του  $T$  (ή, ισοδύναμα, του  $T^*$ ) από την φαινομενικά ασθενέστερη υπόθεση ότι ο  $T^*T$  είναι συμπαγής.)

Με την ευκαιρία, το αντίστοιχο αποτέλεσμα σε χώρους Banach είναι αληθές (Θεώρημα Schauder), όμως χρησιμοποιούνται πιο προχωρημένα εργαλεία στην απόδειξή του (συμπαγεία της μοναδιαίας μπάλας στη ασθενή-\* τοπολογία).

Δες πχ. J.B. Conway, A course in Functional Analysis, Theorem 3.4.