Άσκηση: Ο χώρος του Hardy

Παρατήρηση 1 Αν $a_n \in \mathbb{C}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει (απόλυτα) για κάθε $z \in \mathbb{D}$ και ορίζει μια (ολόμορφη) συνάρτηση $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

Ορισμός 1 *Ο χώρος του Hardy είναι το σύνολο όλων των δυναμοσειρών*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \mu\epsilon \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *και* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *ορίζουμε*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n.$$

Παρατήρηση 2 Η σειρά $\sum_n a_n \bar{b}_n$ συγκλίνει απόλυτα. Γιατί;

Άσκηση 1 Δείξτε ότι ο χώρος $(H^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert. Δείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{C}[z]$ των μιγαδικών πολυωνύμων είναι πυκνός υπόχωρος του H^2 και βρείτε μια ορθοκανονική βάση $\{\zeta_0, \zeta_1, \dots\}$ από πολυώνυμα.

Άσκηση 2 Δείξτε ότι, για κάθε $w \in \mathbb{D}$, η απεικόνιση

$$H^2 \to \mathbb{C} : f \to f(w)$$

είναι (γραμμική και) συνεχής. Επομένως υπάρχει μοναδικό $k_w \in H^2$ ώστε

$$f(w) = \langle f, k_w \rangle \qquad \text{για κάθε} \quad f \in H^2.$$

Δείξτε ότι

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \bar{w}z}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Άσκηση 3 Δείξτε ότι, αν $w \in \mathbb{D}$ και $|w| < r < 1$,

$$\langle f, k_w \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it}) ire^{it}}{re^{it} - w} dt \quad \left(= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - w} dz \right).$$

Ισχύει ο τύπος αυτός όταν $r = 1$;

Άσκηση 4 Ορίζουμε τον τελεστή

$$T : H^2 \to H^2 : \ (Tf)(z) = zf(z).$$

Δείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος (δηλ. $T(H^2) \subseteq H^2$) και ισομετρικός. Βρείτε τον T^*.
Δείξτε ότι υπάρχει μια ισομετρία επί $V : H^2 \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ώστε

$$T = V^{-1} S V$$

όπου S ο unilateral shift, $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Άσκηση: Η προβολή στην τομή δύο υποχώρων

Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σε έναν χώρο Hilbert H και $R = P \wedge Q$ είναι η προβολή στην τομή $\operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$, δείξτε ότι, για κάθε $x \in H$,

$$Rx = \lim_n (PQP)^n x = \lim_n (PQ)^n x = \lim_n (QP)^n x.$$

Εξετάστε πότε οι ακολουθίες τελεστών $\{(PQP)^n\}$, $\{(PQ)^n\}, \{(QP)^n\}$ συγκλίνουν ως προς τη νόρμα του $B(H)$.